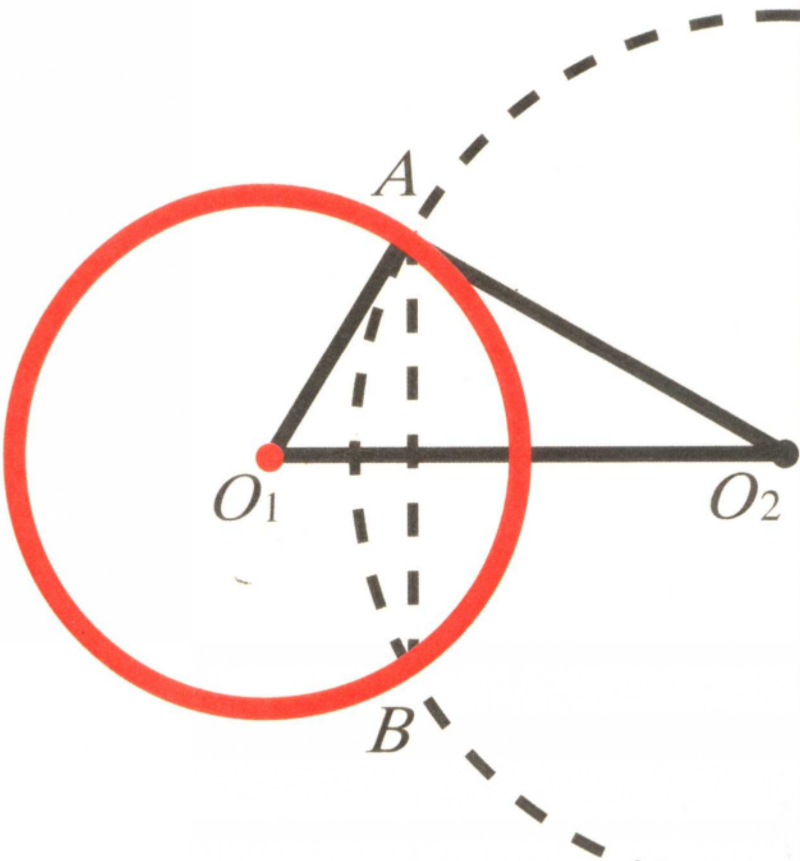
数学方法论入门

SHUXUEFANGFALUNRUMEN

郑毓信 著



浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

数学方法论入门

SHUXUEFANGFALUNRUMEN

ISBN 7-5338-6332-1

9 787533 863326 >

ISBN 7-5338-6332-1/G·6302

定 价：20.00 元

数学方法论入门

SHUXUEFANGFALUNRUMEN

郑毓信 著

浙江教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学方法论入门 / 郑毓信著. —杭州：浙江教育出版社，2006.3

ISBN 7-5338-6332-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 郑… Ⅲ. 数学方法—方法论 Ⅳ. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 018038 号

数学方法论入门

郑毓信　著

● 出版发行　浙江教育出版社
（杭州市天目山路 40 号　邮编 310013）
● 责任编辑　蒋　婷
● 装帧设计　曾国兴
● 责任校对　戴正泉
● 责任出版　程居洪
● 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
● 印刷装订　杭州富春印务有限公司

▶ 开　本　787×1092　1/16
▶ 印　张　12
▶ 字　数　240000
▶ 版　次　2006 年 3 月第 1 版
▶ 印　次　2006 年 3 月第 1 次
▶ 印　数　0001-5000
▶ 书　号　ISBN 7-5338-6332-1/G·6302
▶ 定　价　20.00 元

联系电话　0571-85170300-80928
E-mail：zjjy@zjcb.com
网址：www.zjeph.com

再版说明

《数学方法论入门》原出版于1985年。尽管在发行初期曾由于发行渠道不够通畅遭遇到了一定困难，但有幸得到了《中学数学》杂志编辑部、特别是原主编唐复苏教授的大力支持，结果首印5000册书在两个月内就通过邮购销售一空，更有不少读者因未能买到此书而表示遗憾。

自1985年以来，已经整整20个年头过去了。在这一期间，数学方法论已由当时的一门新兴学科逐渐成为了广大数学教师耳熟能详的一门重要学科，更有不少教师在如何用数学方法论指导实际教学活动这一方面作出了很好的工作。如果说《数学方法论入门》一书也曾在这一过程中发挥了一定作用，这无疑是令笔者十分高兴的。

20年后，浙江教育出版社有意将《数学方法论入门》充实再版，这当然是对于当年工作的直接肯定，同时考虑到这一著作作为一本通俗易懂的数学方法论入门书，对于新进者仍有一定的参考价值。正是基于这样的考虑，再版时对原版中的主要内容（第1章至第5章）基本上保留了原来的面貌；同时，为了充分反映这一领域中的最新进展，以及更好地促进数学方法论与实际数学教学活动的紧密联系，再版时增加了6、7两章。希望能再次得到广大读者的肯定。

一本著作在出版20年后能够再版，对于作者当然是一件十分开心的事，同时也应感谢浙江教育出版社、特别是张宝珍同志的大力支持，更感谢广大读者、特别是一线数学教师多年来所一直给予的认同与信任。

郑毓信

2005年8月于南京大学

前　言

QIANYAN

随着数学科学的深入发展，讲究数学研究的艺术并对数学的研究方法本身进行专门的研究已成为必然的发展趋势。对此国外早已开始了研究，如著名数学家G.波利亚就曾以数十年的时间从事数学方法论的研究。近年来，我国数学界也开始了数学方法论的研究，徐利治教授的专著《数学方法论选讲》（华中工学院出版社，1983）就是一例。为了进一步促进数学方法论的学习和研究，在徐利治教授的支持与鼓励下，笔者写了《数学方法论入门》一书，希望能引起广大读者的兴趣，并能从中得到一定的启发和提高。

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创造等法则的一门新兴学科。由于数学方法论的涉及面十分广泛，本书作为一部“入门书” 自然就不可能对所有这些问题都作出详尽的讨论，而只能从整体的角度对数学方法论中一些具有普遍意义的问题进行分析和讨论。也正因如此，本书论述的重点就不在于各种具体的研究方法，而是一般性的思想方法；分析的范围也不局限于任一特殊的数学分支，而是着眼于各个数学分支中共性的东西。

一部好的数学方法论著作应当是深入浅出的。因为，即使是初等题材的研究，也需要正确的研究方法，而且，就如法国著名数学家J.阿达玛在其名著《数学领域中的发明心理学》中所指出的，一个学生解决某一代数或几何问题的过程与数学家作出发现或创造的过程具有相同的性质，至多只有程度

上的差异而已。当然，初等的题材毕竟不可能完全体现现代数学的特点，解题方法的分析也只是数学方法论研究的一个侧面，因此，数学方法论的著作又必须包含一定的提高成分，所涉及的题材也必须超出解题方法的范围。处理好普及与提高、特殊与一般的关系，即是本书的一个努力方向。希望不仅能对大、中学生起到直接的帮助作用，也能有助于广大数学教师改进自己的教学工作，还能对从事数学、数学哲学及方法论研究的专业工作者具有一定的参考价值。

作为数学发展规律与研究方法的分析，特别是思想方法的研究，数学方法论不仅涉及思维对象（数学本体）的辩证性质，而且也涉及思维过程（认识及反映过程）的辩证性质，因此，正确的哲学思想对于数学方法论的研究就具有特殊的意义。本书也有意识地加强了这一方面的分析。由于数学方法论尚属于一门新兴的学科，因此，本书的选题与立论就难免有不妥之处，希望专家与读者能予以批评、指正。

笔者在数学方法论方面的研究工作得到了徐利治教授的直接指导，因此，本书如果具有一定价值的话，主要应感谢徐利治教授的帮助和指导。我的哲学导师夏基松教授在哲学方面也给予我很大的帮助。对此特表示诚挚的谢意。

郑毓信

1985年2月于南京大学

目录

MULU

第 1 章 数学家的思维方式

第一节　善于使用化归是数学家思维方式的重要特点

一、化归法的一般模式

在数学方法论的研究中，容易首先想到的一个问题是：与一般的科学家（如物理学家）相比，数学家们在思维方法上是否有其独特的地方？对此，一种可能的回答是：数学家们特别善于使用化归的方法来解决问题。也就是说，在解决问题时，数学家们往往不是对问题进行直接的攻击，而是对此进行变形、使之转化，直到最终把它化归成某个（或某些）已经解决的问题。

空洞的分析不如具体的事例，下面就让我们举些实例来说明。

【例 1】 假设我们已经证明了三角形的内角和为 180°，那么，（凸）多边形的内角和就可按照图 1－1 所示的方法来进行计算。

由于四边形可以分割成两个三角形，因此，它的内角和就是 $2\times180°$；五边形可以分成三个三角形，因此，它的内角和是 $3\times180°$；……一般地，由于 n 边形可以分割成 $(n-2)$ 个三角形，因此，它的内角和就是 $(n-2)\cdot180°$。

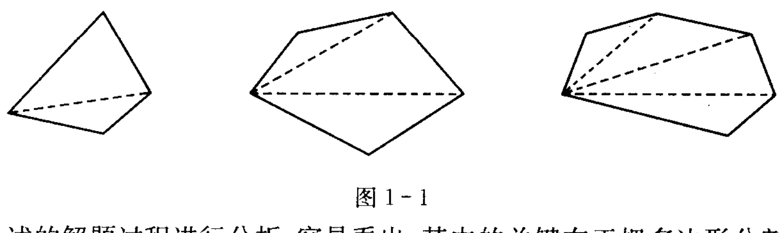


图 1－1

对上述的解题过程进行分析，容易看出：其中的关键在于把多边形分割成（若干个）三角形，而事实上这就是把原来的求取多边形内角和的问题化归成了求取三角形内角和的问题. 由于后一问题是已经解决了的，这样，原来的问题通过化归也就得到了解决。

【例 2】 在掌握了一元一次方程的解法以后，我们就可以利用加减消元法或代入消元法来求解二元一次方程组（更为一般地说，就是求解线性方程组）。

例如，方程组$\begin{cases}3x+y=14, & ①\\ 2x-y=6。 & ②\end{cases}$可以求解如下：

解法 1 （加减消元法）：

①+②得　$5x=20$，即　$x=4$。

把 $x=4$ 代入①并化简可得 $y=2$，

故原方程的解为$\begin{cases}x=4,\\ y=2。\end{cases}$

解法 2 （代入消元法）：

由①得　$y=14-3x$，　③

把③代入②得　$2x-(14-3x)=6$，

化简可得　$x=4$。

把 $x=4$ 代入③得 $y=2$。

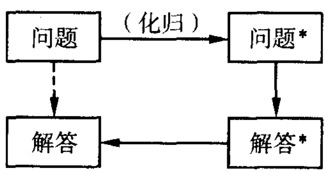
故原方程组的解为$\begin{cases}x=4,\\ y=2。\end{cases}$

从方法论的角度看，显然，这里所使用的也是化归的方法：通过加减或代入，我们把原来的求解二元一次方程组的问题转化成了求解一元一次方程的问题（即达到了“消元”的目的），由于后一问题已经得到了解决，原来的问题也就迎刃而解了。

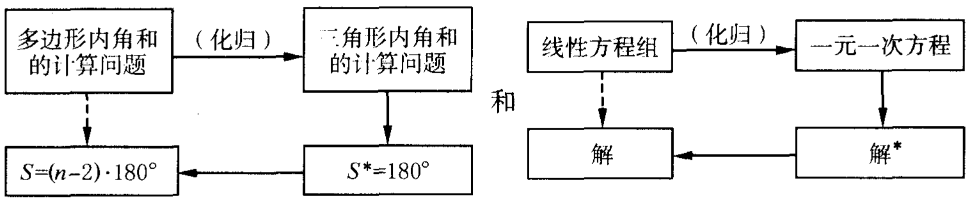
【例 3】 在国外学术界中广为流传着这样一个笑话，和先前的例子相比，它也许更能体现数学家的思维特点：

有人提出了这样一个问题：“假设在你面前有燃气灶、水龙头、水壶，你想烧些开水，应当怎样去做?”对此，某人这样回答：“在水壶中放入水，点燃燃气灶，再把水壶放到燃气灶上。”提问者肯定了这一回答。但是，他又追问道：“如果其他的条件都没有变化，只是水壶中已经有了足够多的水，那你又应当怎样去做?”这时被提问者往往会很有信心地回答说：“点燃燃气灶，再把水壶放到燃气灶上。”但是，提问者指出，这一回答并不能使他感到满意。因为，更好的回答应是这样的：“只有物理学家才会这样做；而数学家们则会倒去水壶中的水，并声称我已经把后一问题化归成先前的问题了。”

利用化归法解决问题的过程可简单地归结为：



例如，前面两个例子中的解题过程就可分别表示为：



二、化归的方向

由未知到已知、由难到易、由繁到简　在用化归法解决问题时，一个必要的条件是：与原来的问题相比，化归后所得出的问题* 必须是已经解决了的，或者是较为容易、较为简单的。也就是说，化归的方向应当是：由未知到已知，由难到易，由繁到简。

可以用以下的例子来说明化归法所应满足的条件：

【例 4】　解方程组：$\begin{cases} x^2+y^2+7xy+4x+4y=31, & ① \\ xy=2。 & ② \end{cases}$

对此有两种可能的解法：

解法 1：

①$-5\times$②得　$x^2+y^2+2xy+4x+4y=21$，

即　$(x+y)^2+4(x+y)-21=0$。

令 $x+y=u$，就有 $u^2+4u-21=0$。

容易解得　$u_1=3, u_2=-7$；即　$x+y=3$ 或 $x+y=-7$。

从而，原来的问题就化归成了如何求解如下的两个方程组：

$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=2。 \end{cases}$　这已经是不难解决的了。

解法 2：

由②可得　$y=\dfrac{2}{x}$。③

把③代入①，有：

$x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2+7x\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)+4x+4\left(\dfrac{2}{x}\right)=31$. 即 $x^4+4x^3-17x^2+8x+4=0$。

从而，只要能求得这个四次方程的解，原来的问题也就解决了。

应当说这两种解法在逻辑上都是无可非议的，即都可被看成化归法的具体运用。但是，与解法 2 相比，解法 1 显然更为可取。因为，一般的四次方程的求解问题是相当困难的，而只有解法 1 才真正达到了“化未知为已知，化难为易，化繁为简”的目的。

但是，对于所说的“繁”和“简”、“难”和“易”等，我们不能仅从形式上去看待，而必须具体问题具体分析。例如，从形式上看，用加倍法去计算一个未知量显然要比直接

计算这个未知量更为繁琐(例如,有这样一个笑话:一个蠢人想要弄清自己究竟有多少头羊,他不是直接去对羊进行点数,而是趴在地上计算羊腿的数目……);但是,对于以下的问题,如果能想到用"加倍法",就很容易解决:

$S_1=1+2+3+\cdots+99=?$

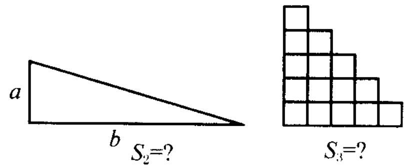


图 1-2

因为,通过"加倍法"所得出的问题*,或者是已经解决了的,或者是较为容易解决的。即有:

$2S_1=1+2+3+\cdots+99+99+98+97+\cdots+1=99\times100=9\ 900$。

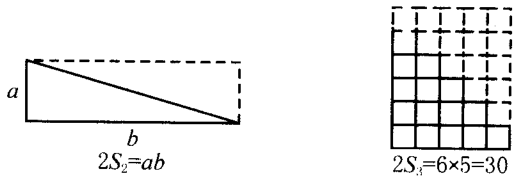


图 1-3

从而就有 $S_1=\frac{1}{2}\times9\ 900=4\ 950$,

$S_2=\frac{1}{2}ab$,

$S_3=\frac{30}{2}=15$。

为了更清楚地说明问题,可以再举一个例子。

【例 5】 用一根定长的绳子在海滩上围出一个面积尽可能大的沙滩(临海的一面不用围),试问:应当采取什么样的形状?

运用"加倍法",这一问题就容易得到解决。因为,我们已经知道:在具有相同周长的各种平面图形中,以圆形的面积为最大。因此,在现在的情况下,我们就应采取圆心在海岸线上的半圆形式。

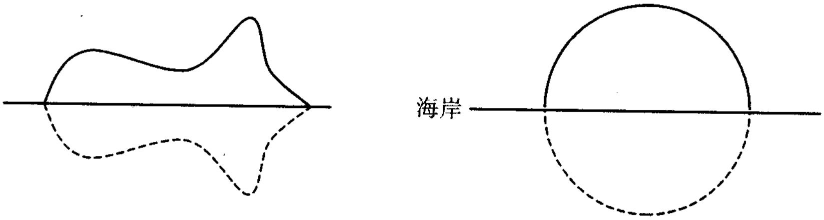


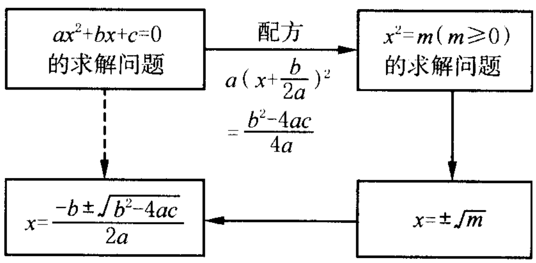
图 1-4

由于加倍后的未知量可以看成“原像”与“镜像”的“合成”(例如,可以把上例中的海岸线想像成一面镜子),因此,上述的方法就常常被称为“镜像法”(颇有趣的是,在 $S=1+2+3+\cdots+99$ 的例子中,未知元素的“镜像”恰好就处于最理想的排列方式:$99+\cdots+3+2+1$)。

总之,我们既应注意化归的必要条件,又应具体问题具体分析,不能犯教条主义的错误。

由一般到特殊　相对于一般而言,特殊问题的解决往往比较容易、比较简单,因此,数学中就经常用到由一般到特殊的化归。

【例 6】　由于特殊类型的一元二次方程 $x^2=m\ (m\geqslant 0)$ 的求解问题是容易解决的,因此,只要能把一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 转化成这种特殊类型(可以通过“配方”来实现),一元二次方程的求解问题就解决了。即:



【例 7】　正如前面求取多边形内角和的例子(例 1)所表明的,在平面直线图形的研究中,我们经常用到由一般的多边形向特殊的多边形——三角形的化归。对此还可以四边形的研究为例,作出进一步的说明。

具体地说,任一四边形都可用对角线分割成两个三角形;特殊地,平行四边形、菱形、矩形及正方形等特殊四边形更可以分割成一些特殊的三角形,即分割成两个全等的三角形、全等的等腰三角形、全等的直角三角形及全等的等腰直角三角形(如图 1－5)。这样,依据各种特殊三角形的性质,我们就可以立即推出相应的四边形的性质。

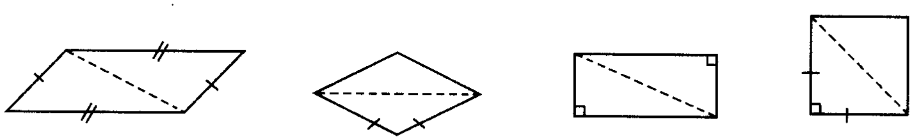


图 1－5

例如,依据全等三角形对应边相等、对应角相等的事实,就可推知平行四边形具有以下一些性质:①对边相等;②对角相等,邻角互补;③对角线互相平分。其次,依据等腰三角形“底边上的中线垂直于底边且平分顶角”的事实,我们则可推知:菱形的对角线互相垂直且平分顶角(如图 1－6)。从而,菱形具有以下一些性质:①四条边都相等;②对角相等、邻角互补;③对角线互相垂直平分且平分顶角。

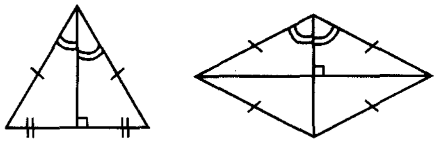


图 1－6

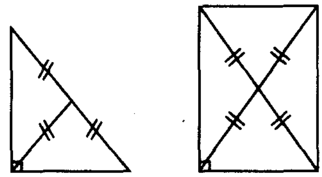


图 1－7

类似地，依据直角三角形“斜边上的中线等于斜边的一半”这一事实，就可推知矩形的对角线相等(如图 1－7)。从而，矩形具有以下一些性质：①对边相等；②四个角都等于 90°；③对角线相等且互相平分。最后，由于正方形既可被看作菱形，又可被看作矩形，因此正方形具有以下性质：①四条边都相等；②四个角都等于 90°；③对角线相等且互相垂直平分，且平分顶角。正方形的这些性质也可通过将它分割成两个全等的等腰直角三角形来直接推出(如图 1－8)。

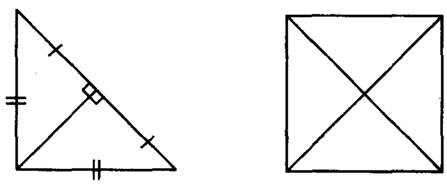
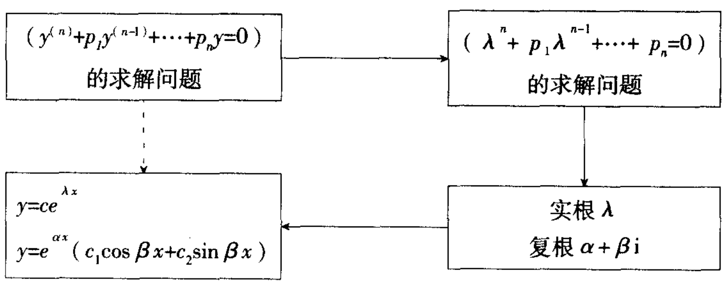


图 1－8

【例 8】 在高等数学中，也可以找到很多由一般向特殊化归的应用实例。例如，n 阶常系数齐次线性微分方程($y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0$)就可通过相应的代数方程——特征方程($\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n=0$) 来求解。即



更为一般地说，“由特殊到一般，由一般到特殊”可以被看成人类认识的一个基本规律。这一规律在数学中也有着十分广泛的应用。对此我们将从各个不同的角度逐步地予以介绍。

三、变化的成分

对所需解决的问题进行变形时，既可以对整个问题，即已知成分（条件）及未知成分（结论）同时进行变形，也可以仅对其中的某一部分进行变形。例如，前面所介绍的"加倍法"就可看成对未知成分进行变形的例子，因为在解题过程中，我们不是直接去求取未知量 S，而是先求取它的 2 倍，即 $2S$；另外，美国著名的数学家和数学教育家 G. 波利亚在《数学的发现》一书中所给出的关于"鸡兔同笼"问题的如下解法，则可以被看成对已知成分进行变形的具体例子。

【例 9】 波利亚所讨论的问题是这样的："一个农夫有若干只鸡和兔子，它们共有 50 个头和 140 只脚，问鸡兔各有多少只？"

波利亚指出，我们可以假想出现了这样一种奇特的现象（**注意**：这可以被看成"思想实验"在数学中的具体应用）：每只鸡都仅用一只脚站在地下，而兔子则举起了前腿。这时，问题就不难解决了。因为，在这种情况下，①脚的总数减少了一半，即只剩下 70 只脚（这就是已知条件的变化）；②鸡头的数量与鸡脚的数量是相等的，而如果有 1 只兔子，脚的总数就要比头的总数大 1。因此，现在的脚的总数（70）与头的总数（50）的差就是兔子的数目，即有 $70-50=20$ 只兔子；进而，鸡的数目就是 $50-20=30$ 只。

以下问题则可以看成对整个问题进行变形的例子。

【例 10】 如图 1-9，已知三角形 ABC 的三条中线，求作这个三角形。

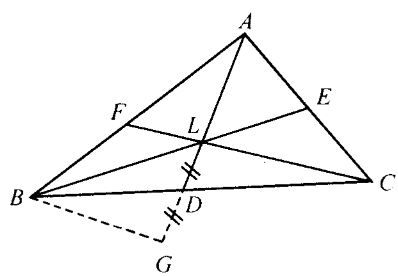


图 1-9

依据中线定理，我们知道：$DL=\frac{1}{3}m$，$BL=\frac{2}{3}n$，$CL=\frac{2}{3}p$（其中，m,n,p 分别代表 BC,AC,AB 边上的中线的长）。因此，如果延长 LD 至 G 点，使 $DG=LD$，就有 $LG=\frac{2}{3}m$，$BL=\frac{2}{3}n$，$BG=\frac{2}{3}p$（因为 $\triangle BDG\cong\triangle CDL$）。这样，原来的问题就化归成已知三边求作三角形（$\triangle BLG$）的问题，而这就不难解决了。具体作法略。

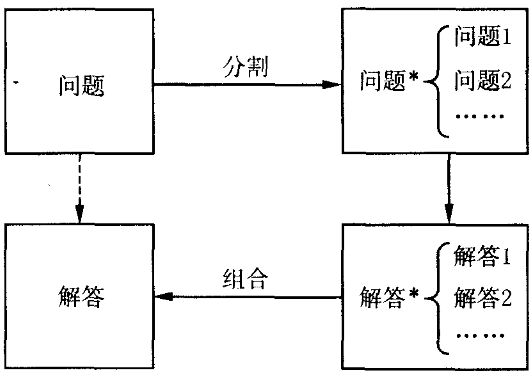
总之，在求解问题的过程中，我们应既善于对未知成分或已知成分进行变形，又善于对整个问题进行变形。一言以蔽之，就是用可变的观点、而不是用静止的眼光来看待问题。

第二节 化归的方法

运用化归法时，关键在于如何将所要解决的问题转化成已经解决或较为容易（简单）的问题。数学中用以实现化归的方法是很多的。这里我们仅介绍几种常用的方法。

一、分割法

什么是分割法？对此，可以用法国著名哲学家、数学家笛卡尔的一段话来回答："把你所考虑的每个问题，按照可能和需要，分成若干部分，使它们更易于求解。"一般地说，用分割法解决问题的过程可归结为：



形体分割法 在面积或体积的计算中经常用到的分割法（在此特称为"形体分割法"，以与我们在此所介绍的广义"分割法"相区别）可以看成通过对未知成分进行分割实现化归的典型例子。

【例 1】 图 1－10 所示为弓形面积的计算方法：

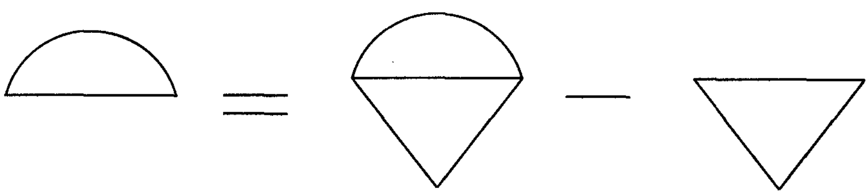


图 1－10

即 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$

又，图 1 - 11 所示为“隧道形截面积”的计算方法：

即 $S_{\text{隧道截面积}}=S_{\text{弓形}}+S_{\text{矩形}}$。

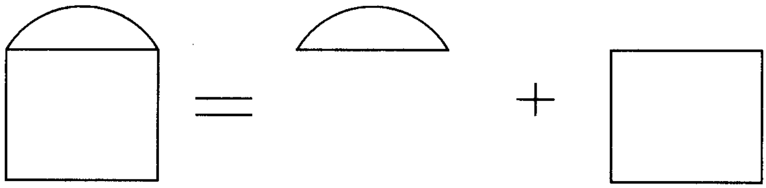
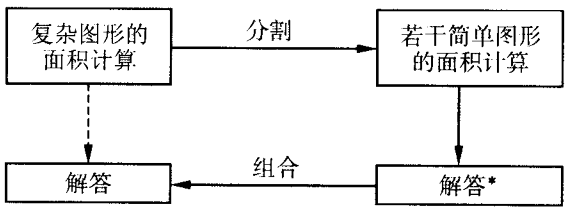


图 1 - 11

一般地说，这种计算面(体)积的过程可归结为：



叠加法　在数学研究中，对未知成分的分割常常被用以实现由一般向特殊的化归。例如，通常所谓的“叠加法”就是这样的情况。

【例 2】　平面几何中关于圆周角及同弧所对的圆心角之间关系的研究可以看作叠加法的典型例子。

如果圆心位于圆周角的一边上(如图 1 - 12 甲)，所说的问题就不难解决了。因为，此时显然有$\angle ACB=\angle OBC$，从而就有$\angle AOB=\angle ACB+\angle OBC=2\angle ACB$，也就是说，圆周角等于同弧所对的圆心角的一半。

对于圆心并不位于圆周角的一边上的一般情况来说，只需要进行适当的“分割”就可化归成上述的特殊情况(如图 1 - 12 乙)。其中，$\angle ACB=\angle DCB+\angle ACD$(或$\angle ACB=\angle DCB-\angle ACD$)。通过相应的线性组合，我们就可证明上述关于“圆周角等于同弧所对圆心角的一半”的结论。

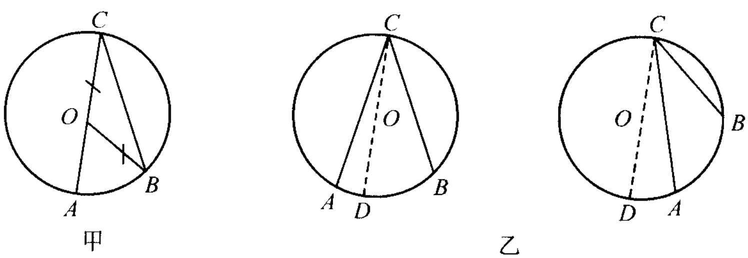


图 1 - 12

对上述例子进行分析，可以看出：

①在叠加法中，未知成分被“分割”成了一些较为简单的成分的线性组合。一般地说，这也正是叠加法的一个主要特点。

②运用叠加法解决问题的关键在于通过分割实现由一般向特殊的化归，只有这样才能真正达到化未知为已知、化难为易、化繁为简的目的。

为了更清楚地说明问题，还可以“插值问题(公式)”为例来进行说明。

【例3】 插值问题：给定 n 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，及另外 n 个数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，求一个次数最低的多项式 $f(x)$，使其满足条件：$f(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$。

解 对上述问题进行分析，容易看出，所说的一般情况可以被看成以下 n 个特殊情况的“线性组合”：对给定的 n 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，及另外一个数 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$，求取一个次数最低的多项式 $f_k(x)$，使其满足如下的 n 个条件：

$f_k(x_i)=0(i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$，

$f_k(x_k)=y_k$。

其次，上述的特殊情况是容易求解的：由于 $x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 是 $f_k(x)$ 的根，因此 $f_k(x)$ 必然包含以下 $(n-1)$ 个因子：$(x-x_1),\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1}),\cdots(x-x_n)$；从而，$f_k(x)$ 至少是 $(n-1)$ 次的；而且，如果其确为 $(n-1)$ 次的话，它的形式必定为：

$c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$；

进而，依据 $f_k(x_k)=y_k$ 的条件，就可确定

$$c=\frac{y_k}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

从而就有 $f_k(x)=\dfrac{y_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$。

最后，通过线性组合就可求得原问题的解，即“插值公式”：

$$f(x)=\frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}+\frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}+\cdots+\frac{y_n(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}。$$

轨迹交会法 除去对未知成分本身进行分割以外，我们也可以对未知成分所应满足的条件进行分割。例如，几何作图中经常用到的“轨迹交会法”就是这样的例子。

具体地说，为了求得满足指定条件的对象(例如点)，我们可以首先对所说的条件进行分割；进而，又只要分别求得满足各个“部分条件”的对象的集合(即相应的“轨迹”)，我们就可通过求取各个集合的公共部分(即“交会”的方法)求得满足原来条件的对象。

【例4】 试作出△ABC 的外接圆的圆心，即满足条件 $OA=OB=OC$ 的点 O(如图 1-13)。

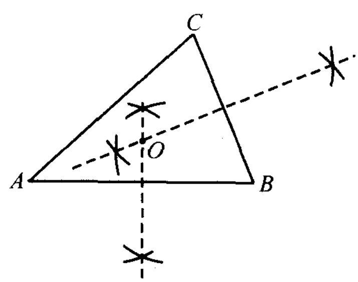
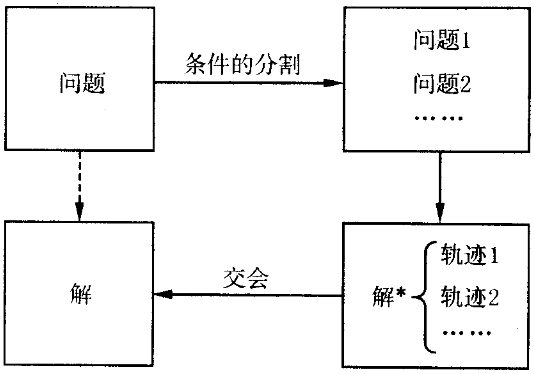


图 1-13

上述条件显然可“分割”为 $OA=OB$（部分条件一）及 $OB=OC$（部分条件二）。从而，就只要分别作出满足上述条件的轨迹，即线段 AB 及线段 BC 的垂直平分线，其交点就是所要求作的三角形外接圆的圆心。

一般地说，运用轨迹交会法解决问题的过程可归结为：



与前述对于未知成分本身进行分割的方法相同，对于轨迹交会法我们也应作广义的理解，即应当理解成通过对未知成分所应满足的条件进行分割而实现化归的一般方法，这样“轨迹交会法”的应用也就不只局限于几何作图的范围。例如，我们都有这样的体会：在求解实际问题（应用题）时，设立多个未知数常常要比设立一个未知数更为方便，而这实质上也就可以被看成（广义的）“轨迹交会法”的应用。因为，在引进了多个未知数以后，我们就可把问题中的未知成分看成一个多元的未知量，如 (x, y)，(x, y, z)，……所列出的各个方程就构成了“部分条件”；进而，方程的解就可以被看成相应“轨迹”的交点。

这是一种十分重要的思想方法，即我们可以把很多问题中的未知成分都看成一个“多元”的未知量。例如，圆就可以被看成这样的一个“二元”的未知量，它分别包括“圆心”和“半径”这样两个“未知元素”；类似地，曲线方程也可被看成一个“二元”的未知量，它所包括的则分别是“方程的类型”（是一次方程，还是二次方程，……）与“相应的系数”这样两个特殊的“未知元素”。显然，在这样的理解下，“轨迹交会法”的应用范围就得到了进一步的扩展。

局部变动法　对于未知成分所应满足的条件进行分割，也常常被用以实现由一般到特殊的化归。例如，所谓的“局部变动法”就是这样的例子。

具体地说，局部变动法是一种用以求取依赖于多重因素的单变量的极值的方法：由于所求取的极值对于每个可变因素来说，也都必定是极值，因此在此类问题的研究过程中，我们就可以暂时固定除一个因素以外的所有可变因素，并单独研究这一因素变化的结果；然后，在解决了这些较为特殊的问题以后，我们又可由局部而整体地求得原来所要求取的极值。

可以借用波利亚在《数学与猜想》一书中所给出的两个例子来说明局部变动法的

用法。

【例 5】 如图 1－14，a,b 是两条已知的空间直线，点 X,Y 分别是直线 a 和直线 b 上的动点，试求取 $d=|XY|$ 的最小值，即直线 a,b 的距离。

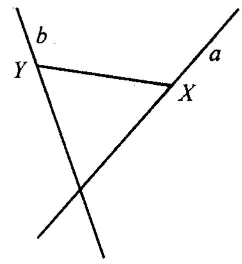


图 1－14

为了解决这一问题，我们暂时固定一个动点 Y，而单独研究点 X 变化的情况。这时问题就变成了如何求取直线外一定点(Y)到这一直线(a)的距离。显然，当直线 a 上的动点 X 位于使 XY 垂直于 a 的位置时，相应的 XY 就是定点 Y 到直线 a 的距离，也即 Y 到直线 a 上各点的最短距离。

然后，我们又可交换 X 与 Y 的位置，即固定 X 而让 Y 单独变化。依据同样的分析可知：当直线 b 上的动点 Y 位于使 YX 垂直于 b 的位置时，相应的 YX 就是直线 b 上各点到定点 X 的最短距离。

最后，由于 X,Y 都是动点，因此，就只有当 X,Y 位于使 XY 同时垂直 a 和 b 的位置时，$d=|XY|$ 才可能是最小值。因为，如果 XY 与 a 不垂直，我们就可通过变动 X 点的位置(固定 Y)使 XY 变短，这样原来的 XY 就不可能是最小值；类似地，如果 XY 与 b 不垂直，我们则可通过移动 Y 点(固定 X)使 XY 变短。总之，除非 XY 同时垂直于 a 与 b，否则 $d=|XY|$ 就不可能是最小值。换句话说，如果有最小距离，它就必定沿着直线 a,b 的公垂线。

【例 6】 给定边数，在已知圆中作出具有最大面积的内接多边形。

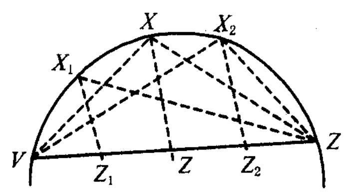


图 1－15

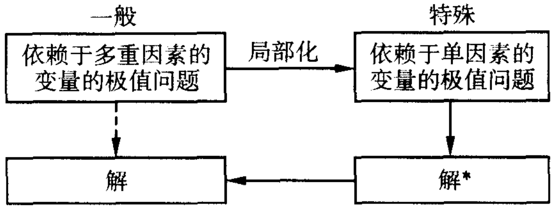
如图 1－15，作为局部变动法的具体运用，我们可假设除一点(例如 X)以外，多边形的其余各个顶点 $V,W,\cdots,Z$ 都已固定，也即都已位于它们所应处的位置上，这样，剩下的问题就是如何选择 X 的位置使多边形的面积为最大。

显然，这时的多边形可看成由两个部分所组成：一个具有$(n-1)$个固定顶点的多边形 $VW\cdots Z$，一个三角形 VXZ。由于前者的面积与 X 的选择无关，因此现在的问题就是：在固定了一边(VZ)的条件下，应当如何去选择第三个顶点 X 的位置(要求位于已知圆上)，使得$\triangle VXZ$ 的面积最大。由于三角形的面积等于底和高的乘积的一半，因此，为使$\triangle VXZ$ 的面积最大，我们就应这样去选择点 X 的位置，即使 VZ 边上的高 XH 具有最大值。因此，X 的位置就应满足 $XV=XZ$，即$\triangle VXZ$ 应为等腰三角形。

以上分析显然也适用于多边形的其余各个顶点，因此最终就有这样的结论：当面积达到最大值时，多边形的所有各边必须都相等，即具有最大面积的圆内接多边形必为正多边形。

由以上两个例子可以看出：局部变动法是经由对未知成分所应满足的条件进行

分割、也即通过“局部化”来实现由一般到特殊的化归。即有：



由于单因素变动的情况通常要比多个因素同时变动的情况简单得多，因此局部变动法就是一种有效的研究方法。例如，作为这一方法的具体应用，在高等数学中就有如下的关于多元函数的极值定理：

如果函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处有偏导数存在，且 $f(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 为 y 的极值，则有：

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})=0, \\ f'_{x_2}(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})=0, \\ \cdots \\ f'_{x_n}(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})=0。 \end{cases}$$

显然，这一结论就是通过局部化把多元函数的极值问题化归为一元函数的极值问题而得到的。

逐步逼近法 在运用分割法解决问题时，我们不应机械地去实行“分割—组合”的过程，而应注意充分利用已获得的知识。

例如，在运用轨迹交会法解决问题时，我们不应独立地去求得满足各个“部分条件”的“轨迹”，而应采取“逐步逼近”的方法。也就是说，如果我们已经求得了满足“部分条件一”的对象集合，这时就无须求出所有满足“部分条件二”的对象，而只需在上述集合中进一步“筛选”出满足“部分条件二”的对象。显然，这样就能充分利用已获得的知识，从而更有效地解决问题。

依据以上的分析，在对原来的条件进行分割时，我们就应注意分析如何才能更快、更为有效地去解决问题，也即应当注意选择“最佳方案”。例如，在求取圆锥曲线的方程时，我们应首先确定方程的类型（是椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，还是抛物线方程 $y^2=2px$），然后再去求取相应的系数 $(a,b,c,p,\cdots)$。

类似地，在求解方程组时，我们也应首先按照“更快、更有效地解决问题”这一原则去确定求解的次序（不妨就设为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$）；其次，在逐个求取 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的值时，我们又应充分利用逐步获得的知识。如在求解 x_2 时，就应利用已求得的 x_1 的值；在求解 x_3 时，就应利用已求得的 x_1 和 x_2 的值；……即应按照如图 1 - 16 所示的次序进行求解：

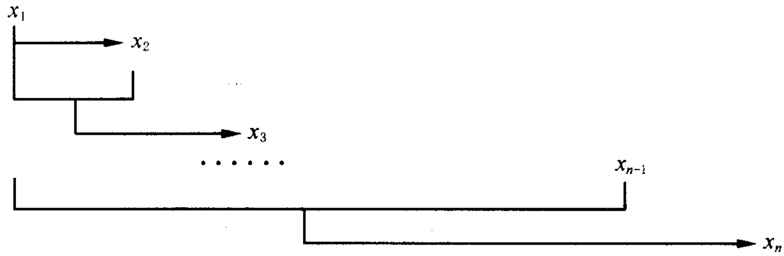


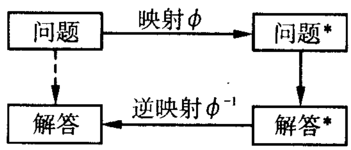
图 1－16

一般地说，这种“充分利用已获得的知识作为新的行动基地”的方法就是所谓的“逐步逼近法”。显然，这是一种十分合理的思想方法。

二、映射法

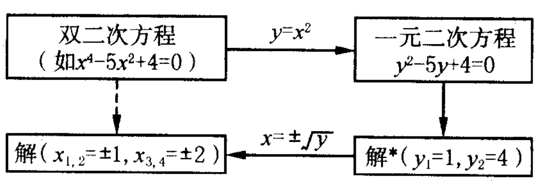
在现代的数学研究中，映射法是用以实现化归的一种重要方法。

什么是映射？笼统地说，就是指在两类数学对象或两个数学集合之间建立某种“对应关系”。利用映射法解决问题的过程是：首先通过映射将原来的问题转化为问题*；然后，在求得了问题*的解答*以后，再通过逆映射（反演）求得原问题的解。即：

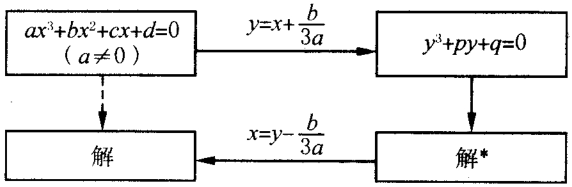


【例 7】 徐利治教授在《数学方法论选讲》中，曾举过一个十分通俗的例子来说明映射法的应用。他写道：“一个人对着镜子剃胡子，镜子里照出他面颊上胡子的映像，从胡子到映象的关系就叫做映射。所以映射就是联系着原象与映象的一种对应关系。他用剃刀修剪胡子时，作为原象的胡子与剃刀的关系可以叫作原象关系。这种原象关系在镜子里表现为映象关系。他从镜子里看到这种映象关系后，便能调整剃刀的映象与胡子的映象的关系，于是，他也就真正修剪了胡子。这里显然用到了反演原则：因为他已经根据镜子里的映象能对应地反演为原象这一原理，使剃刀准确地修剪了真实的胡子（原象）。”

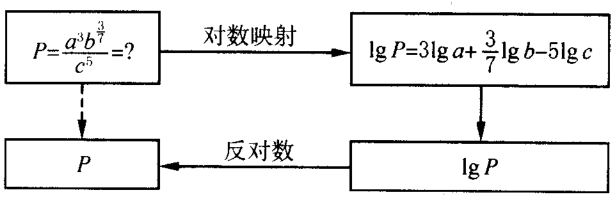
【例 8】 利用映射 $y=x^2$，双二次方程可以化归成二次方程得到解决。即：



另外，利用映射 $y=x+\frac{b}{3a}$ 可将一般的一元三次方程转化成特殊的三次方程（二次项系数为 0）来求解。即：

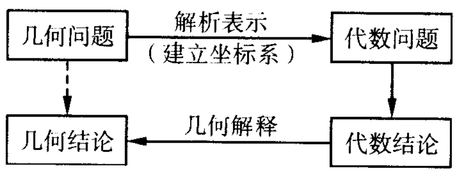


【例 9】 对数计算法是应用映射法来简化问题的典型例子。由于积、商（乘方及开方）的对数分别等于乘数或被除数的对数与乘数或除数的对数的和或差（乘、除），所以通过对数映射（$x\rightarrow \lg x$），就可把复杂的计算转化成较简单的计算。如：



【例 10】 解析几何的创立也可归结为映射法的成功应用。

众所周知，在初等数学中，数和形的研究基本上是彼此独立地进行的。然而，由于笛卡尔借助于建立坐标系在点（曲线）与数组（方程）之间建立了对应关系，几何问题就可转化成代数问题，这样，我们就可以利用代数方法来进行几何的研究。即：



例如，利用解析几何的方法，可以容易地证明：三角形的三条高共点。

证明：如图 1－17，为简化问题，不妨以 BC 边为 x 轴，以 BC 边上的高 AD 为 y 轴。并设 A,B,C 三点的坐标分别为 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$。依据解析几何的有关知识，可以立即求得三角形三条边所在直线的斜率分别为：

$k_{BC}=0, k_{CA}=-\frac{a}{c}, k_{BA}=-\frac{a}{b}$。

进而，三条高所在直线的方程分别为：

$AD: x=0$，

$BE: cx-ay-bc=0$，

$CF: bx-ay-bc=0$。

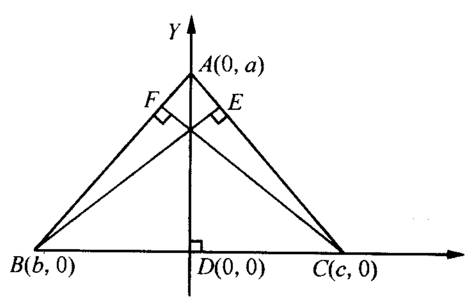


图 1－17

显然，这三个方程有公共解$\begin{cases} x=0, \\ y=-\dfrac{bc}{a} \end{cases}$。

从而就证明了三角形的三条高共点。

值得指出的是，解析几何的创建者笛卡尔还曾提出过一种更为一般的解决问题的方法，即所谓的“万能方法”。这一方法的大概模式是：

第一，把任何问题化归为数学问题；

第二，把任何数学问题化归为代数问题；

第三，把任何代数问题归结为方程式的求解。

显然，认为这一方法能被用以解决所有问题的想法是错误的，因为这过分地夸大了化归法的作用；但是，我们又必须承认笛卡尔的上述思想包含一定的合理成分，那就是“数学化”“代数化”“计算化”的思想方法。例如，在几何的研究中未必一定要建立坐标系，但也可以考虑能否通过计算来解决原来的问题。

【例 11】 这是一个智力竞赛题，要求仅用两次（沿直线进行的）切割把图 1－18 变成一个与该图等积的正方形。

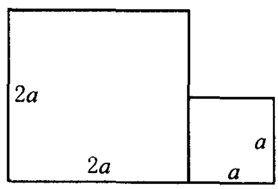


图 1－18

为了解决这一问题，比较合理的思路就是首先计算出变形后所得出的正方形的边长。这是不难解决的：设所得出的正方形的边长为 x，由于 $x^2=(2a)^2+a^2=5a^2$，因此就有 $x=\sqrt{5}a$。进而根据已求得的正方形的边长，我们就可“有的放矢”地去进行切割的实践。容易发现，所要求取的切割如图 1－19 所示。

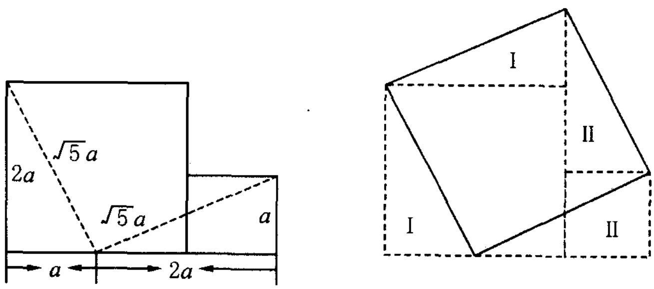


图 1－19

映射法的各种用法 映射法之所以在现代数学研究中有着广泛的应用，一个重要的原因是：就应用的范围而言，映射法不仅可以被用以解决诸如求取某个未知量这类具体的数学问题（对数计算就是这样的例子），也可以被用以解决涉及理论的整体性结构等具有更高“层次”的数学问题。另外，就应用的性质而言，映射法不仅能被用以得出问题的肯定性解答（即是按照原来的要求去解决问题，如求得所要求取的未知量），也可以被用以得出问题的否定性解答（即证明了原来的问题是不可能得到解决的）。

【例 12】 以非欧几何“相对相容性”的证明为例，可以说明映射法如何能被用以解决“更高层次”上的数学问题。

一个数学理论，如果其中不会出现两个互相矛盾的结论，就称这一理论为相容的。从数学史的角度看，相容性问题的研究主要是由于非欧几何的发展所导致的。众所周知，非欧几何的建立源于欧氏平行公理(第五公设)的研究。平行公理可表述为：过直线外一点，在此平面内可以作、也只能作一条直线与已知直线相平行。由于这一公理缺乏自明性(对此将在第 5 章中作进一步的分析)，因此，从欧几里得的时代起，人们就一直企图对平行公理进行证明。最初采用的是正面的方法，即希望能用别的公理对平行公理进行证明；后来又出现了反面的尝试，即设平行公理为假，并希望能由此推出矛盾，由此就可依据排中律断言平行公理为真。但这些努力始终都未能取得成功，导致人们逐渐产生了这样的想法，认为用相反的假设去代替原来的欧氏平行公理也能发展出合理的几何理论——非欧几何。例如，如果用“过直线外一点，在此平面内可以作不止一条直线与已知直线相平行”的规定来取代欧氏平行公理，就可以发展出所谓的“罗巴切夫斯基几何”(罗氏几何)。

但是，正如大家所熟悉的，建立在经验之上的信念不能代替严格的证明。因此，为了证明非欧几何的合理性，一个重要的问题就在于能否从理论上证明非欧几何的相容性。

罗氏几何的相容性证明最早是由意大利数学家贝特拉米在 1868 年给出的。他的证明方法是这样的：首先，贝特拉米在欧氏空间的一个曲面(伪球面)与罗氏平面之间建立了对应关系，即给出了这样的“翻译”法则。利用这一法则，罗氏(平面)几何中的对象(点、直线)及对象之间的基本关系(如“点在直线上”等)都可在欧氏空间的这一曲面上得到解释。其次，他又证明了：在这样的解释下，罗氏几何中的公理所对应的都是欧氏几何中的定理。这样，罗氏几何相对于欧氏几何的相容性就得到了证明。因为，如果罗氏几何中包括有两个互相矛盾的结论，那么通过上述的“翻译”，在欧氏几何中也就可以立即找到两个相互矛盾的结论，但人们确信欧氏几何是相容的，从而也就不应怀疑罗氏几何的相容性。

由于贝特拉米所证明的是罗氏几何相对于欧氏几何的相容性，因此这就是一种相对相容性的证明。在数学的历史发展中，这一证明具有十分重大的意义(其直接意义在于：它从理论上证明了罗氏几何的合理性)；而从上面的介绍可以看出：这一证明实质上也就是映射法的成功应用。

【例 13】 几何三大难题不可解性的证明可以看成应用映射方法得出问题的否定性解答的实例。

所谓几何三大难题，是指由古希腊人所提出的以下三个尺规作图问题：

圆化方问题　要求作一正方形，使其面积等于已知圆的面积，即要作出长度为$\sqrt{\pi}$的线段；

倍立方问题 要求作一立方体，使其体积等于原立方体体积的两倍，即要作出长度为$\sqrt[3]{2}$的线段；

三等分角问题 要求把任意角三等分。

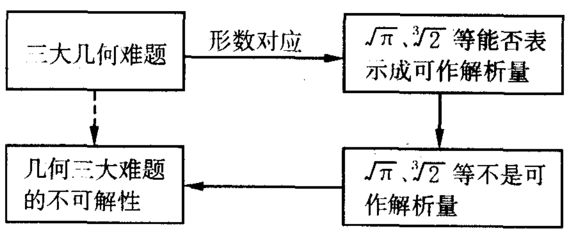
为了解决这三个问题，人们曾作了长期的努力，但最终却证明了这些问题是不可能解决的，而这种“不可能性”的证明主要就建立在映射法之上。由于这一证明相当繁琐，这里仅对其基本思路作一简单介绍。

一般地说，几何作图就是如何去确定某些点的位置，而所谓“尺规作图”就是指如何仅仅利用直线与直线相交、直线与圆相交、圆与圆相交这三种基本方式去确定点的位置。按照形数对应的解析几何观点，点的位置是由其坐标决定的，因此，几何作图就可归结为求作定长的线段；又因为我们总可以把作图开始用的几何量的长度看作单位长（正是在这样的假设下，“圆化方问题”及“倍立方问题”才可分别归结为求作长度为$\sqrt{\pi}$与$\sqrt[3]{2}$的线段），因此，几何作图的问题就可归结为能否以某种确定的形式表示出某些数量。

我们不妨把所有能用圆规和直尺作出的线段统称为“可作几何量”，而将其相应的数量（在上述的假设下）统称为“可作解析量”。例如，任何有理数都是可作解析量，因为我们总可用直尺和圆规作出长度为任意有理数的线段。一般地说，由于直线和圆在形数对应下的方程分别为二元一次方程和二元二次方程，因此，可作解析量就仅是用有理数经过有限次加、减、乘、除与开平方运算所能表示的数。

由于$\sqrt[3]{2}$与$\sqrt{\pi}$都无法表示为上述形式，因此“圆化方问题”与“倍立方问题”都是尺规作图不能解决的问题。另外，为说明“三等分角问题”的不可解性，只要以60°的角为例进行分析就可以知道：为把60°角三等分，必须用尺规作出数量cos20°或sin20°，但由于这两个数都必须用有理数的立方根表示出来①，也即无法表示成尺规可作解析量的形式，因此，即使是60°角的三等分问题也不可能仅用尺规得到解决。

上述的证明过程可归结如下：



① 在三角恒等式$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$中，如令$x = 20°$，就有：$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$，即$4\cos^3 20° - 3\cos 20° - \frac{1}{2} = 0$。因此，cos20°就是以下的三次方程的根：$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$。但是，利用三次方程的求根知识可以证明：这个方程有一个正实根，两个负实根，它们都必须用有理数的三次方根来表示。因此cos20°就不是尺规可作解析量。用类似的方法也可证明sin20°不是尺规可作解析量。

因此,这也就是映射法的直接应用。

三大几何难题不可解性的证明在数学的历史发展中也具有十分重要的地位。首先,它结束了延续2 000年之久的一件"数学公案",从而避免了后人再在这些问题上无谓地耗费更多的时间和精力。其次,从方法论的角度看,这一研究又清楚地表明了在数学中我们不仅应当积极地去寻求正面的、肯定性的解答,而且也应考虑可能的、否定性的解答。这当然也就更为清楚地表明了映射法的重要作用及其应用的广泛性。

就如徐利治教授在《数学方法论选讲》一书中所指出的,映射法还有着更广泛的方法论意义。他写道:"概念乃是人脑活动的最高产物,它是事物对象或事物关系在人脑中的反映,我们不妨把概念的形成过程看作人脑机制完成的映射。于是概念便是事物原象(对象及关系)的映象。利用概念思维(包括逻辑分析推理)得出的结论,返回到事物原象上去解决问题,这可以理解为一种反演过程。"因此,一般情况下,通过人脑概念思维来解决实际问题的全过程,在一定条件下也就可以看成映射法的应用。再者,虽然我们只是就映射法作出了可以在不同层次与不同方向(肯定、否定)上对此加以应用的说明,但它们在原则上显然也适用于一般的化归法。

三、求变法

恒等变形法与参数变异法是数学中经常用到的另外两种化归方法。由于这两种方法都是通过适当的变化来实现由未知向已知、由难到易、由繁到简的化归,因此我们就把它们统称为"求变法"。

恒等变形法 在初等数学中,可以找到很多利用恒等变形来实现由未知向已知的化归的例子。

【例14】 代数式的恒等变形在求解代数方程时是十分有用的。例如,利用因式分解,我们就能很快求得一些较为简单的方程的解。

如求解方程:$x^3-5x^2+6x=0$。

由于 $x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$,

因此原方程即为 $x(x-2)(x-3)=0$,

由此可得 $x_1=0,x_2=2,x_3=3$。

【例15】 为了求解三角方程,我们经常要用到三角式的恒等变形。

如求解方程:$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$。

$$\begin{aligned}\text{由于 }\sin x-\sqrt{3}\cos x&=2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x\right)\\&=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\end{aligned}$$

因此，原方程即为 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$，

也即 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故解为 $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$，$x_2=2k\pi+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$（$k$ 为整数）。

恒等变换在高等数学中也有着广泛的应用。

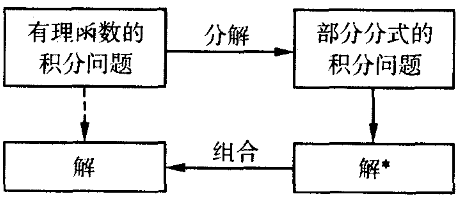
【例 16】 由于以下五种特殊类型的有理函数的积分问题已经得到了解决：

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$；$\frac{b}{x-a}$；$\frac{b}{(x-a)^n}(n>1)$；

$\frac{bx+c}{x^2+px+q}$；$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}(n>1)$。

（其中 n 是正整数，$a,b,c,\cdots$是任意实数）

因此，只要能将一般的有理函数表示成这五种函数的线性组合（也即分解成所谓的“部分分式”，而这就是恒等变形的具体运用②），它们的积分问题也就立即可以得到解决。即：



如计算：$\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$。

由于被积函数可分解如下：

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)},$$

因此有

$$\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C。$$

【例 17】 如果对三角函数只施行加、减、乘、除这四种运算，所得出的式子称为三角函数的有理式。利用所谓的“万能公式”$\left(\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\tan x=\frac{2u}{1-u^2},\right.$ $\left.\cdots，其中\ u=\tan\frac{x}{2}\right)$可以把任意三角函数的有理式变形为 $\tan\frac{x}{2}$ 的有理式；进而，通

② 如果把所说的“分解”看成广义的“分割”，上述的积分方法也可被看成叠加法的一个具体应用。

过适当的变量代换（令 $\tan\frac{x}{2}=u$），我们又可将 $\tan\frac{x}{2}$ 的有理式的积分问题转化为 u 的有理函数的积分问题；由于有理函数的积分问题已经得到了解决，这样三角函数的有理式的积分问题也就获得了彻底的解决。

如计算 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ 。

利用万能公式，可将被积函数变形为 $u=\tan\frac{x}{2}$ 的有理式：

$$\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=\frac{(1+u)^2(1+u^2)}{4u}。$$

再通过引进变换 $\tan\frac{x}{2}=u$，就可求得相应的不定积分：

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin(1+\cos x)}dx&=\int\left[\frac{(1+u^2)(1+u)^2}{4u}\right]\cdot\frac{2}{1+u^2}\cdot du\\&=\frac{1}{2}\int(u+2+u^{-1})du=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C\\&=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C。\end{aligned}$$

一般地说，在各种数学理论中我们都可看到这样的一些恒等式，由于它们如此经常地得到应用，因此就都被看成相应的基本公式。如代数学中的乘法公式、二项式定理等；另外，在微积分学中则有如下的求导公式与积分公式：

$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$；

$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$；

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$；$(v(x)\neq0)$

$\int(u(x)\pm v(x))dx=\int u(x)dx\pm\int v(x)dx$；

$\int c\cdot u(x)dx=c\cdot\int u(x)\cdot dx$；

$\int u(x)v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)v(x)dx$。

显然，由这些公式的作用我们可以更为清楚地看出恒等变形的重要性。

【例 18】 只有利用上述的“分部积分公式”，我们才能顺利地求得以下的积分：

$\int\ln|x|dx=x\cdot\ln x-\int x\cdot(\ln x)'dx=x\cdot\ln x-x+C$。

参数变异法 下面以一元三次方程求解公式的推导过程为例，对参数变异法进行说明。

【例 19】 由于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的求解公式早已得出，因此容易想到，如果能把三次方程转化成二次方程来求解，一元三次方程的问题也就可以得到解决。但是，怎样才能实现所说的转化呢？从数学的历史发展来看，三次方程的求解问题也曾耗费了人们大量的精力，直到 16 世纪，这一问题才由意大利数学家塔尔塔里亚解决。

塔尔塔里亚所采取的就是“参数变异法”。具体地说，为了求解三次方程 $x^3+px+q=0$（由例 8 我们已经知道：一般的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq0$，可以转化成这种特殊的三次方程来求解），他引进了参数 u 和 v，并令 $x=u+v$。

这时原方程就变形为：

$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$，

即 $u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+pu+pv+q=0$，

$u^3+(3uv+p)u+(3uv+p)v+v^3+q=0$。

因此，如果取 $3uv=-p$，对这样选择的 u 和 v 就有：$\begin{cases}u^3+v^3+q=0, & ①\\ 3uv+p=0。 & ②\end{cases}$

由于②式可变形为 $u\cdot v=-\dfrac{p}{3}$，即 $u^3\cdot v^3=-\dfrac{p^3}{27}$。因此，由二次方程的有关知识就可知道，$u^3$ 和 v^3 就是二次方程 $y^2+qy-\dfrac{p^3}{27}=0$ 的根。

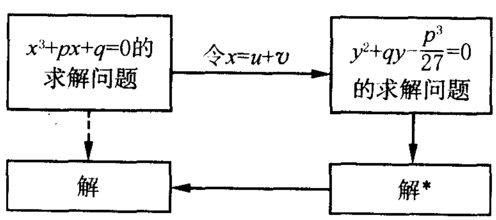
利用二次方程的求解公式容易求得：

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}。$$

因此，原方程的解为：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}。$$

对上述解题过程进行分析，容易看出，其中的关键在于引进了参数 u 和 v：由于 u, v 具有一定的“自由度”（在开始时，我们只规定了它们的和为 x），因此，它们的引进就使原来的问题处于一种可变的状态之中；然后，通过 u 和 v 的适当选择（即令 $3uv=-p$），我们就最终实现了将三次方程化归成二次方程来求解的目标。即：



一般地说，参数变异法的特征就在于通过引进参数使得问题的表现形式或解的

结构处于可变的状态；当然，这种变化的目的则又是为了最终实现由未知向已知、由难向易、由繁到简的化归。

除了三次方程的求解公式以外，在数学中还可以找到许多应用参数变异法的例子。例如，前面提及的待定系数法，事实上也可被看成参数变异法的一种具体运用。因为，正是通过参数（“待定系数”）的引进，我们才能保证所说的“逐次逼近”的过程（即首先确定曲线的方程的类型，再求取相应的系数的做法）能顺利地得以进行。另外，在熟悉了这一方法以后，数学中的一些成功事例才不会显得那样的“超凡脱俗”，以致人们对此只能表示由衷的赞叹，但同时却又遗憾地感到：所用的方法实在不知道是怎样想出来的，从而简直就像“从帽子里忽然掏出来的一只兔子”。

为了对后一点进行说明，让我们再来看一个例子。

【例 20】 在微积分学中有两个著名的定理：洛尔定理和拉格朗日中值定理。它们的内容分别为：

洛尔定理 若函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内具有导数，且在区间的两个端点处具有相等的函数值，即有 $g(a)=g(b)$，则在该区间内至少存在一点 $c(a<c<b)$，在该点函数的导数等于 0，即 $g'(c)=0$.

拉格朗日中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内具有导数，则在该区间至少存在一点 $c(a<c<b)$，使等式 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ 成立。

在一般的教材中，拉格朗日中值定理是依据洛尔定理来证明的，而这一化归的关键则在于引进了如下的辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)。$$

由于 $\varphi(x)$ 显然满足洛尔定理的条件（$\varphi(a)=\varphi(b)=0$），因此，依据洛尔定理就可断定：在区间 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $\varphi'(c)=0$；又由于 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，因此就有 $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，

即 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$。

这样，拉格朗日中值定理就得到了证明。

上述的证明是容易看懂的。但是，在第一次看到这一证明时，人们往往会产生这样的想法：相关的辅助函数 $\varphi(x)$ 是怎样想出来的？可真像“从帽子里忽然掏出来的一只兔子”！

然而，如果按照“求变”的思想方法进行分析的话，解题的思路就会变得较为明朗。

容易想到，一个可能的证明途径即是努力实现由拉格朗日中值定理向洛尔定理的化归；由于洛尔定理要求有关的函数在区间的端点处具有相同的函数值，即满足 $g(a)=g(b)$，因此在此就必须引进适当的辅助函数 $\varphi(x)$，后者并应起到这样的“联

系”作用：它既与拉格朗日中值定理中的$f(x)$有联系，又应与洛尔定理有联系，也即能够满足 $\varphi(a)=\varphi(b)$（不失一般性，可设 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$）。

为此，可令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)+k(x-a)$。

显然，这一函数满足 $\varphi(a)=0$ 的条件；另外，由于引进了参数 k，我们就使这一函数的表现形式处于可变的状态，这样，通过 k 的适当选择，我们也就可使其同时满足 $\varphi(b)=0$ 的条件。

具体地说，依据 $\varphi(b)=0$ 的条件，显然就有：

$f(b)-f(a)+k(b-a)=0$，

由此即可求得 $k=-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；

从而，最终就有 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

这样，这一辅助函数就再也不像是“从帽子里忽然掏出来的一只兔子”了。

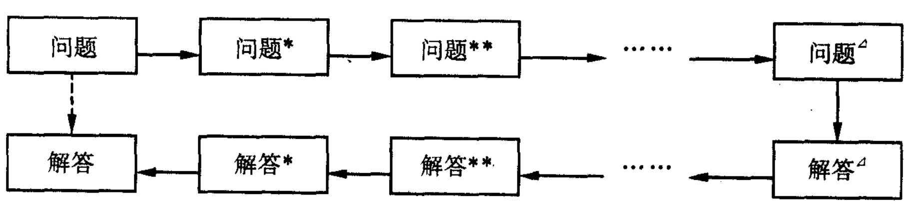
第三节 多步的化归与包含“反馈”的化归

一、更为一般的模式

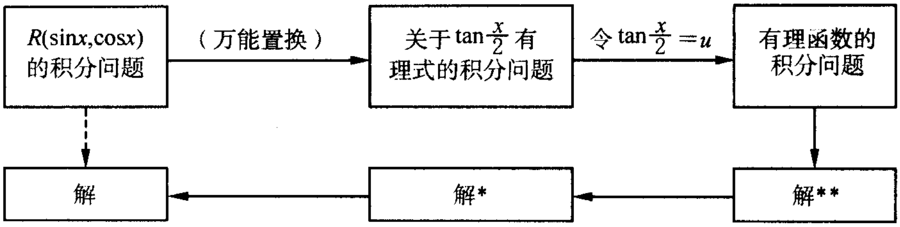
作为化归法的进一步分析，我们还应指明以下几点：

第一，在实际运用化归法去求解问题时，常常需要用到多次的化归。正如英国著名哲学家霍布斯所指出的：“从一个愿望联想起我们曾经看到过的某些方法、手段，借助这些方法、手段，我们可以得到如所求的目标那一类的东西。再从这些方法或手段出发，我们又联想到别的一些通向它们的方法或手段，这样继续下去，直到达到某个我们能力所及的起点为止。”

从而，第一节中所介绍的化归法的解题模式就只是一种简化了的模式，而应更一般地表述为：



【例 1】 前面所给出的关于三角函数的有理函数的积分方法（第二节例 17）事实上就建立在二次化归的基础上，即：



【例 2】 已知圆台的上、下底的半径及圆台的高，可以求得它的体积，而这事实上就包含了如图 1－20 所示的三次化归：

(1) $V=?$　　(2) $V_1=?$ $V_2=?$　　(3) $x=?$ $H=?$　　(4) $x=?$

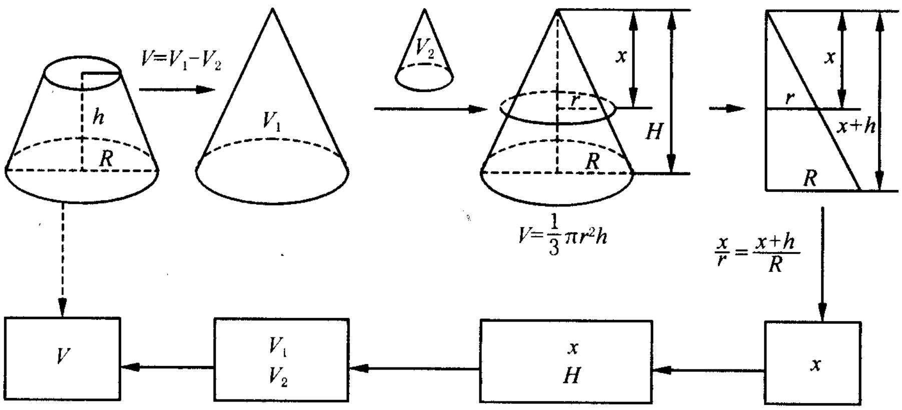


图 1－20

更为广义地说，数学中经常用到的“分析—综合法”也可被看成“多次化归法”的应用实例。即：

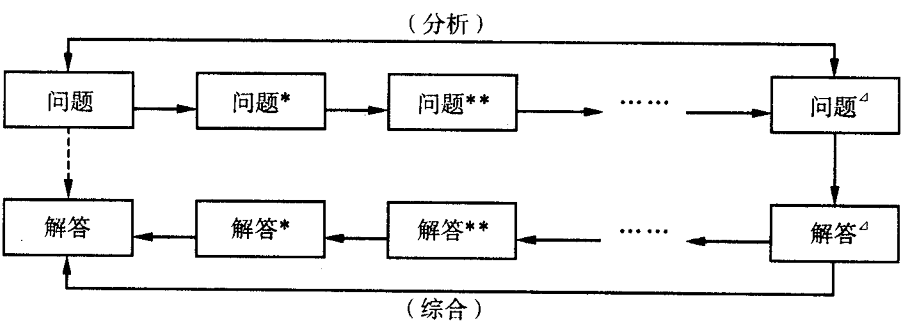
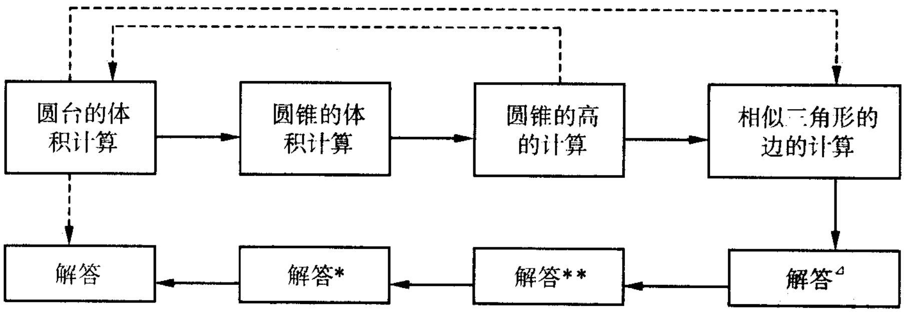


图 1－21

第二，在实际应用中，化归往往不是单向的、完全确定的过程，而是一种包括了多

次反复与尝试的复杂过程。

例如，在上面的例子上，只有把“如何求取小圆锥的高 x”的问题与原来问题中的已知条件(R,r,h)结合起来考虑，才会最终导致由未知(圆台体积的计算问题)向已知(相似三角形对应边的关系问题)的转化。这样，其中的“分析”就不是一个单向的过程，而是一种包含了“反馈”的反复过程。即：



在实际应用中，也只有通过多次的尝试(包括错误的尝试)，我们才能不断加深对于问题的理解，从而才有可能最终找到正确的化归方向与方法。因此，在这样的意义上，化归也就不是一个完全确定的过程，毋宁说，其中必定包含多次的尝试与反复。

二、化归法的核心思想

化归法的核心思想 正如前面已指出的，实现化归的方法是多种多样的。正因为此，与前面所列举的各种具体方法(分割法、映射法、求变法等)相比，很好掌握化归法的核心思想就更为重要，也就是说，我们不应以静止的眼光、而应以可变的观点去看待问题，即应善于对所要解决的问题进行变形。

从这样的角度去分析，我们又应特别强调以下几点：

第一，所说的变形并不是一种无目的的活动，因此，在实践过程中，我们就应始终“盯住目标”，即应当始终考虑这样的问题：怎样才能达到解决原来问题的目的？例如，怎样才能求得问题中的未知量？又如，怎样才能证明问题中的结论？

第二，由于只有通过反复的实践，才能找到正确的化归方向与方法，因此，在解题过程中，我们就应保持一定的灵活性。这也正如波利亚在《数学的发现》中所指出的：“如果有几条可能的途径，而其中没有一个是十分有把握的，那么，在沿着某一条路走得太远以前，最好先对每一条都稍加探索，因为任何一条路都有可能把你引入死胡同，因此不应过早地把自己局限于某一途径；另外，我们也不应把自己过死地局限于某一途径，即一旦发现自己陷入了死胡同，就应及时地转到另一条途径上去。”(当然，作为问题的另一方面，我们又应具有一定的“韧性”：只要还有希望，就不应轻易地放弃已有的工作。)

第三，由于解决问题的途径常常不是惟一的，因此，我们又应考虑如何才能更快、更有效地解决问题，即应注意在各种可能的途径之间进行选择。一般地说，波利亚在《数学的发现》中所给出的如下几条“择优原则”在这里也是适用的：困难少的应先于困难多的；较熟悉的应先于不那么熟悉的。

化归法的局限性　虽然化归法在数学研究中有着重要的作用，但它也具有一定的局限性。

首先，并不是所有的问题都可通过化归得到解决。例如，所说的“由难到易、由繁到简”的化归显然不可能无限制地永远继续下去。

其次，由前面的分析可以看出，运用化归法解决问题的关键就在于能否找到正确的化归方向与方法，因此，尽管化归法主要地应被看成（或者说，最终表现为）一种解决问题的方法，但是，它的成功应用却是以“数学发现”为前提的。

从而，就数学方法论的研究而言，我们也就不能停留于化归法的分析，而应积极地去从事新的研究。例如，我们首先就应讨论数学发现的方法——这就是第 2 章的主题。

第2章 类比与归纳：数学发现的重要方法

众所周知，数学是通过演绎而展开的。也就是说，数学结论的正确性建立在演绎证明的基础上。但是，这些结论是怎样被发现的呢？由于任何数学断言在得到证明之前，都不能称之为结论，而只能称之为猜测（猜想或推测），因此，更为准确地说，这里所讨论的问题应表述为：数学中的猜测是怎样获得的？

一般地说，在数学发现中既包含有直觉的成分，又包含有逻辑的成分。数学发现既是一种无意识的、非逻辑的思维活动，又是一种自觉的、逻辑的思维活动。由于数学发现中包含直觉的成分，因此，尽管我们可以从发明心理学的角度对这种思维活动的某些特征作出研究（参见第3章的讨论），但要使其完全纳入逻辑的框架是不可能的。另外，由于数学发现中包含逻辑的成分，因此，我们仍可从数学发现的实例中总结出某些规律，并给出数学发现的某些模式。

就数学方法论的研究而言，就有两种不同的研究对象：论证（解决问题）的方法和猜测（发现问题）的方法（应当注意，按照这样的分类，"论证"就不仅包括了通常所说的演绎证明，而且也包括了各种严格的数学方法。对此在以下的讨论中将不再予以强调）。这两种方法的区别是明显的：论证的方法是可靠的、无可置疑的和终决性的；猜测的方法却是不那么可靠的、有争议的和暂时的。因为，在没有得到证实之前，所得出的猜测始终有被新的发现证伪的可能性，从而就是不完全可靠的；另外，由于各人的经验和思想方法必然存在一定的差异，因此对于猜测可靠程度的估计就是因人而异的，或者说是有争议的；最后，新的发现则又可能导致对问题的重新认识，因此，猜测的方法也是暂时的。但又正如牛顿所指出的："没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现。"因此，在这样的意义上，猜测的方法就比论证的方法更为重要。

这一章我们将讨论猜测的方法，讨论的重点则是类比法与归纳法。正如法国数学家、天文学家拉普拉斯所指出的："即使在数学里，发现真理的主要工具也是归纳和类比。"

第一节　类比法

所谓类比，是指通过两个对象类似之处的比较，由已经获得的知识引出新的猜

测。类比法在数学发现中具有十分重要的作用。例如,德国天文学家、数学家开普勒就曾明确指出:“我珍视类比胜于任何别的东西,它是我最可依赖的老师,它能揭示自然界的秘密,在几何学中它应该是最不容忽视的。”

一、简单的类比与复杂的类比

简单的类比 数学中有些类比是十分简单的。诸如:

【例1】 由一元二次方程必有两个实根或复根(重根计算在内),容易联想到:一元三次方程很可能具有三个实根或复根。

类似地,在证明了二次不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 以后,也就容易联想到以下的三次不等式:$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$。

在 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 的条件下,可以证明后一个不等式。因为,此时有:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0。$$

【例2】 如图2-1,由于(正)棱锥的体积等于同底等高的(正)棱柱的体积的三分之一,因此,容易联想到:圆锥的体积很可能也等于同底等高的圆柱的体积的三分之一。

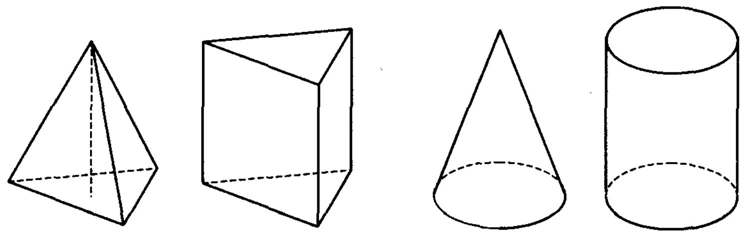


图2-1

【例3】 如图2-2,依据平面几何中两条直线被三条平行线所截得的线段成比例这一事实,我们就可联想出:在立体几何中,两条直线被三个平行平面所截得的线段很可能也成比例。

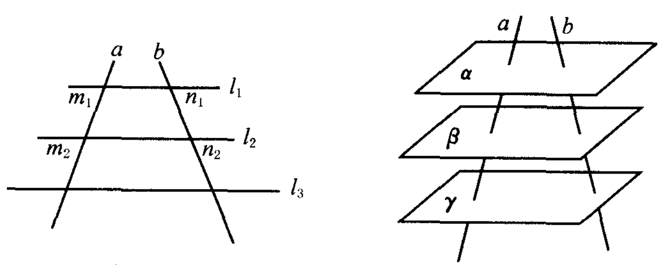


图2-2

【例 4】 在日常生活中，也可找到很多应用类比法的例子。例如，在最近的报纸上曾看到这样一则消息：科学家发现，躺着比坐着能更快地记住东西，因为这时头脑中的血液流量较大。但是，能否由此而联想出另一种更好的记忆姿势呢？显然，一个可能的答案是：倒立是最好的记忆姿势，因为，这时头脑中的血液流量最大！

对以上各个例子进行分析，可以看出，其中的类比具有直接性、明显性。一般地说，这就是简单类比的主要特征。

复杂的类比 但是，数学中的类比并不总是那么直接、明显的；恰恰相反，在很多情况下，只有通过深入的分析，我们才能顺利地运用类比法去引出新的猜测。

【例 5】 只有从三角形和四面体在各种多边形（多面体）中所处的特定地位这一角度进行分析，我们才能发现两者的共同之处：正如三角形是最简单的多边形，四面体也可被看成最简单的多面体。从而，由三角形的三条角平分线相交于一点、而且这就是三角形内切圆的圆心这一事实，我们也就可以联想出以下的猜测：四面体六个二面角的平分面也相交于一点，这一点就是四面体内切球的球心（如图 2－3）。

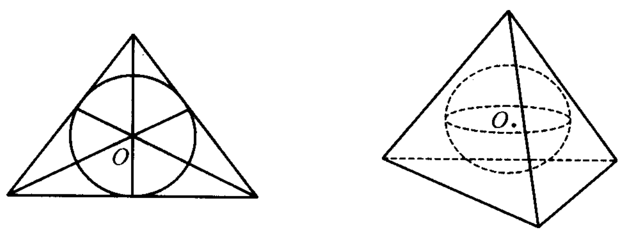


图 2－3

【例 6】 如果从三角形与棱锥的构成方式这一角度分析，我们就能发现三角形与棱锥的类似之处（如图 2－4）：三角形可以看成将线段外一点与线段上的各个点用线段相连所生成的（图形）；棱锥则可看成将多边形（所在平面）外一点与多边形上的各个点用线段相连所生成的（形体）。从而，由圆的面积等于以圆周为底边、半径为高的三角形的面积这一事实出发，我们就可联想到：球的体积很可能就等于以球面为底面、球半径为高的棱锥的体积。

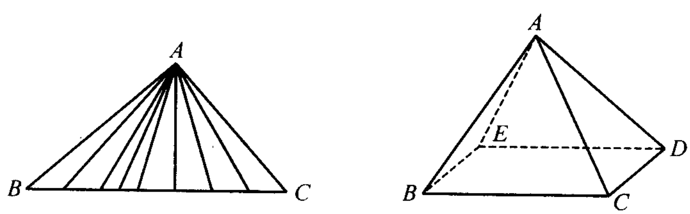


图 2－4

对以上两个例子加以比较，可以看出：首先，无论是四面体，还是棱锥，它们与三角形都是很不相同的；其次，虽然都是与三角形进行类比，但四面体与（一般的）棱锥

又是不完全相同的。因此,我们在此就可引出这样的结论:

第一,类比未必都具有直接性、明显性,即未必都是简单的类比,也有可能是间接的、不那么明显的,即是建立在抽象分析之上的复杂的类比。

第二,运用复杂的类比法的关键在于"求同存异"。具体地说,所谓"求同"是指在抽象分析的基础上找出两个对象的"类似之处"。也就是说,我们并不要求这两个对象在各个方面都彼此相似,而只要求它们在某一方面或在某一抽象层次上是相似的。显然,这种"求同"的工作是产生联想的必要前提。另外,所谓"存异",是指新的猜测的产生不是简单的重复、模仿,而是一种创造性的工作,特别是在由已知事实去引出新的猜测时,我们必须注意分析两者之间存在的差异,必须依据对象的具体情况作出适当的"翻译"或"调整"。③

为了更清楚地说明问题,以下再以一元一次不等式的研究为例来加以说明。

【例 7】 由于一元一次不等式与一元一次方程在形式上有很多相似的地方,因此,容易想到,和一元一次方程一样,我们也可通过去分母、去括号、移项、合并同类项及同除以一次项的系数这样五个步骤求得一元一次不等式的解(这就是"求同")。但是,由于现在所讨论的是不等式、而不是等式(方程),因此我们又应想到:最终所得的解也应是不等式,即是一个确定的范围,而不是等式(确定的数);另外,在求解的过程中我们则又应当特别注意所施行的运算是否会改变原来的不等关系。容易发现,这里唯一要注意的是:如果我们在不等式的两边都乘(或除以)同一个负数,就应改变不等号的方向(这就是"存异")。

显然,通过这样的比较,一元一次不等式的求解问题就十分容易掌握了。

例如,求解:

$\dfrac{(x-4)}{3}-1>\dfrac{5x+6}{2}$		(对照) $\dfrac{(x-4)}{3}-1=\dfrac{5x+6}{2}$
解:		
去分母:	$2(x-4)-6>3(5x+6)$	$2(x-4)-6=3(5x+6)$,
去括号:	$2x-8-6>15x+18$,	$2x-8-6=15x+18$,
移项:	$2x-15x>18+8+6$,	$2x-15x=18+8+6$,
合并同类项:	$-13x>32$,	$-13x=32$,
两边同除以-13:	$x<-\dfrac{32}{13}$。	$x=-\dfrac{32}{13}$。

一般地说,数学中大量使用的并不是简单的类比,而是复杂的类比,因此,下面的讨论将主要集中于复杂的类比。

③ 在通用的逻辑教材中常常可以看到如下的关于类比法的定义:"我们观察到两个或两类事物在许多属性上都相等,便推出它们在其他属性上也相同。这就是类比法。"

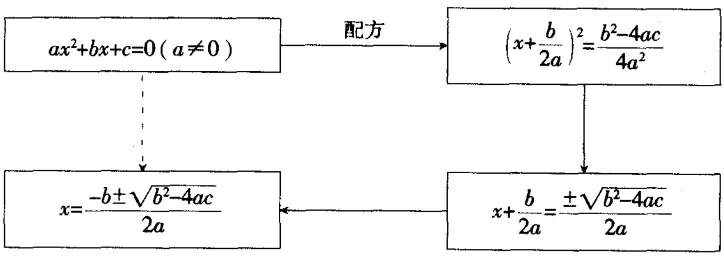
显然,这一定义只适用于简单的类比,对于复杂的类比则并不完全妥当。

二、类比法的作用

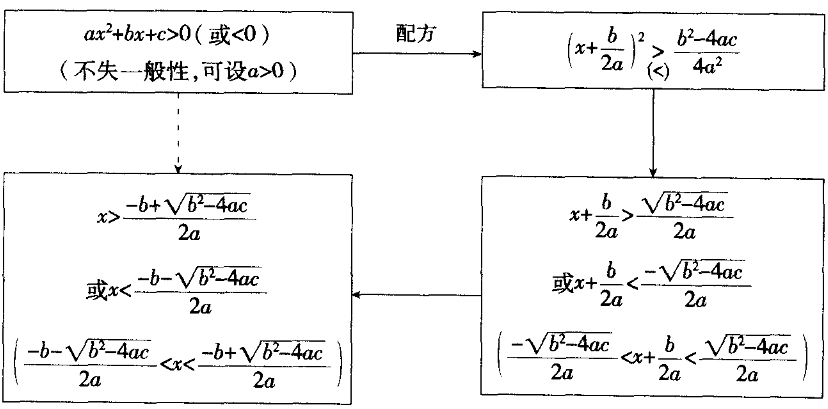
由前面的例子可以看出，类比法基本被用于：由已知的事实去引出新的猜测。另外，除了对可能的解答进行猜测以外，类比法在数学研究中也常常被用于对可能的解题方法进行猜测。换句话说，如果我们面临一个需要解决的问题（例如一个需要加以证明的猜想），那么，为了找出可能的解决方法，我们就可首先考虑另一个与它相似但已经得到解决或较易解决的问题，然后，通过类比就可获得关于如何求解当前问题的有益启示。

【例 8】 前面我们利用类比法解决了一元一次不等式的求解问题，由此就可进一步联想到：一元二次不等式的求解问题很可能也可以通过与相应的一元二次方程加以比较得到解决。

事实上，一元二次方程的求解过程可归结为：



从而，通过类比就有：



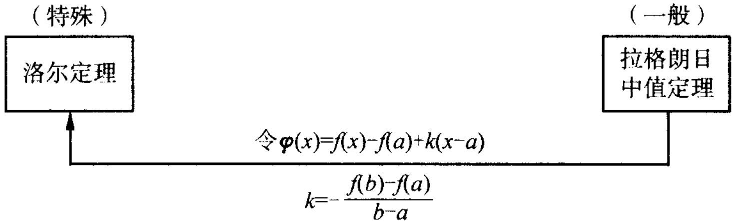
【例 9】 在第 1 章中，我们曾对利用洛尔定理去证明拉格朗日中值定理的过程进行了分析（第二节例 20），由此也就可以联想到如何利用洛尔定理证明柯西中值

定理。

柯西中值定理的内容是：设 $f(x)$、$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)$、$F'(x)$ 在开区间 (a,b) 内存在，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点均不为零，则在 a,b 之间至少存在一点 c，使得

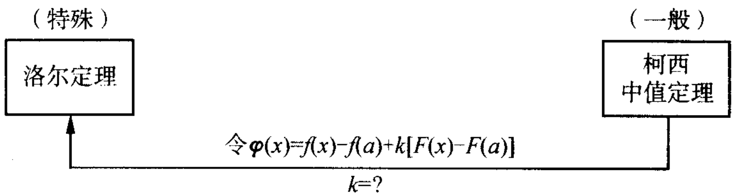
$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(c)}{F'(c)}。$$

由前面的分析我们已经知道，证明拉格朗日中值定理的关键在于构造出这样一个辅助函数 $\varphi(x)$，它既与这一定理中的 $f(x)$ 有联系，又与洛尔定理有联系，也即能够满足 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 的要求。即：



通过类比可以联想到：第一，若想利用洛尔定理去证明柯西中值定理，关键在于能否构造出这样一个辅助函数 $\varphi(x)$，它既与柯西中值定理中的函数 $f(x)$、$F(x)$ 有联系，又与洛尔定理有联系，也即符合 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 的条件。第二，为了得出 $\varphi(x)$，我们也可采用"参数变异法"，即可设 $\varphi(x)=f(x)-f(a)+k[F(x)-F(a)]$。

类似地，这一过程也可表示为：



具体地说，按照这样的思路，我们就可立即求得 $k=-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$。容易验证：相应的辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\cdot[F(x)-F(a)]$ 确实可以被用于由洛尔定理去证明柯西中值定理。

三、几种常用的类比

在数学研究中，以下几种类比是经常用到的。

平面与空间的类比　在立体几何的研究中，将所要解决的问题与平面几何中的

有关问题加以比较，常常可以给我们有用的启示。

【例 10】 给定正四面体，试求其内切球的半径。（记为“问题甲”）

依据例 5 的分析，容易想到这一问题与以下问题是类似的：

给定正三角形，试求其内切圆的半径。（记为“问题乙”）

显然，要把“问题甲”直接化归为“问题乙”是不太容易的，但我们仍可能经由类比获得有用的启示。具体地说，在“平面”的情况下，所要求的内切圆的半径与正三角形的高的比是1∶3；由此我们就可联想到：在“空间”的情况下，所要求的内切球的半径与正四面体的高的比很可能也是常数（如图 2-5）。

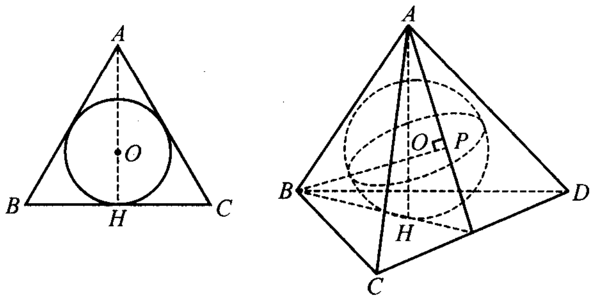


图 2-5

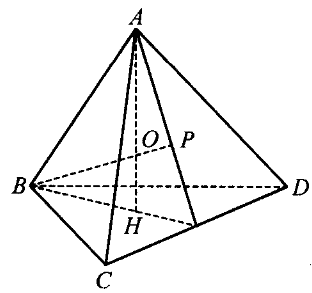


图 2-6

依据上述的想法，这一问题就不难解决了。

为了不失一般性，可假设正四面体的边长为 1。依据有关的知识，容易算得正四面体的高 $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$。现设所要求的内切球半径与高的比为 x，依据 $OH=OP$ 的事实，就可确定 x 的值（由于所说的是正四面体，因此点 H，P 分别为正三角形 BCD 和正三角形 ACD 的中心）：

$$\because\quad OH=OP=x\cdot AH=\frac{\sqrt{6}}{3}x,$$

又 $BP=AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$$\therefore\quad BO=BP-OP=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}x=\frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)。$$

将上述各式代入 $OB^2=OH^2+BH^2$，就有：

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2(1-x)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(BH\text{ 显然为}\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

即 $2(1-x)^2=2x^2+1$。

由此可解得：$x=\frac{1}{4}$。

从而所求的正四面体内切球的半径与高之比就是 1∶4. 也就是说，如果正四面

体的棱长为 a,则其内切球的半径为:

$$\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a。$$

类似地,在空间解析几何的研究中,我们也应善于将所要解决的问题与平面解析几何中的有关问题加以比较。

【例 11】 通过将平面(这是最简单的曲面)与直线(这是最简单的曲线)加以比较,容易联想到:由于直线方程是最简单的二元一次方程 $Ax+By+C=0$,因此,平面方程很可能就是最简单的三元一次方程:$Ax+By+Cz+D=0$。

进而,依据两条直线 $l_1(A_1x+B_1y+C_1=0)$ 与 $l_2(A_2x+B_2y+C_2=0)$ 互相平行的充要条件是 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$,我们又可联想到:两个平面 $\alpha_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0)$ 与 $\alpha_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0)$ 互相平行的充要条件很可能也就是其一次项系数成比例,即 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

在熟悉了三维空间以后,我们又可通过类比去研究四维甚至 n 维空间。事实上,四维空间的最初概念就是类比联想的直接产物:将三维空间的点的概念加以推广,我们就得到了四维空间的点的概念——后者是由四个相互独立的坐标 (x_1, x_2, x_3, x_4) 所决定的;另外,所有这些"四维点"的集合就是所谓的"四维空间"。

由于我们生活在三维空间中,因而就无法直接作出四维空间的模型,这样要从事四维空间的研究就变得比较困难。但是,通过适当的类比,我们仍可想像出四维空间的有关情况,甚至还可以实际地作出四维空间中各种形体在三维空间中的投影。

【例 12】 依据三维空间中的球在平面上的投影是两个叠合在一起的圆的事实(如图 2-7),我们就可联想出:"四维超球体"在三维空间中的投影很可能就是两个互相贯穿的球。

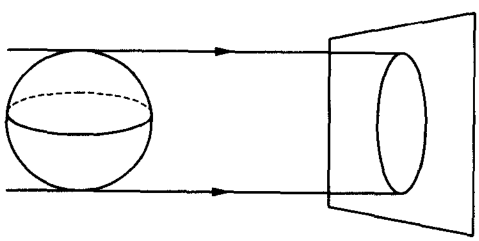


图 2-7

类似地,依据立方体在平面上的投影情况(如图 2-8 甲),我们就可联想出:四维空间中的"超立方体"在三维空间中的(点)投影很可能是由两个立方体所构成的:其中的一个套在另一个的里面,其对应顶点则彼此相连(如图 2-8 乙)。

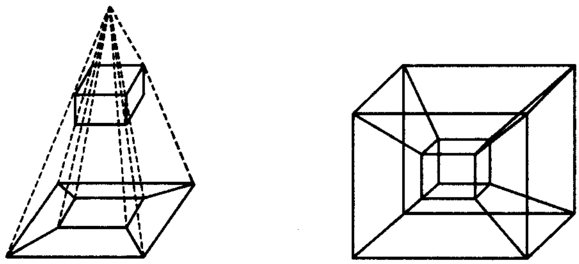


图 2-8

这样，我们就可通过投影的研究把握四维空间中有关形体的性质。

数与形的类比 在数学研究中，数和形的类比经常在两个互为相反的方向上得到应用：我们既可通过与“形”的比较去推测“数”的有关性质，也可通过与“数”的比较去推测“形”的有关性质。

例如，按照数形对应的观点，既然我们可以进行平面与空间（三维空间与 n 维空间）的类比，自然也就可以经由三次与二次（低次与高次）的类比来从事方程与不等式的研究。

【例 13】 由例 8 的讨论可知，二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（或 <0）的求解问题事实上等价于二次三项式 ax^2+bx+c 的符号讨论，而后者的变化情况则可归结如下（设相应方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$）：

x	→	x_1	→	x_2	→
ax^2+bx+c $a>0$	+	0	−	0	+
ax^2+bx+c $a<0$	−	0	+	0	−

由此可以想到：三次不等式 $ax^3+bx^2+cx+d>0$（或 <0）的求解问题也可归结为相应的三次式 ax^3+bx^2+cx+d 的符号讨论，对于后者的变化情况则可总结如下（设相应的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根为 x_1，x_2 和 x_3，且 $x_1<x_2<x_3$）：

x	→	x_1	→	x_2	→	x_3	→
ax^3+bx^2+cx+d ($a>0$)	−	0	+	0	−	0	+
ax^3+bx^2+cx+d ($a<0$)	+	0	−	0	+	0	−

这样，三次不等式的求解问题也就获得了解决。

一般地说,经由“形”的分析来从事“数”的研究的方法在现代数学研究中具有十分重要的作用。例如,我们常常通过向量、长度、内积等概念的引进以使分析命题具有一定的几何意义,从而就可凭借几何直观去推测分析中的新定理,即首先用几何的直观猜出定理,然后再用分析的方法进行证明。

【例 14】 依据三维空间向量的数性积的定义,可以立即推出以下的不等式:

$|\alpha \cdot \beta| \leqslant |\alpha| \cdot |\beta|$。

若将$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$看成 n 维空间中的两个向量,则$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$及$(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}$分别是这两个向量的长度. 这时,通过类比就可猜测出在 n 维空间中也有如下的不等式成立:

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n| \leqslant (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

(其中$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|$是这两个向量的数性积)。

其次,我们也可用“数”的分析来帮助“形”的研究。

【例 15】 依据椭圆(圆)、双曲线、抛物线在平面直角坐标系中的解析式都是二元二次方程的事实可以联想到:这几种曲线具有某种内在的联系,即属于同一个类型。事实上,正如古希腊人就已认识到了的,这几种曲线都可被看成用一个不通过顶点的平面去截圆锥面所得出的曲线。

有限与无限的类比 数学中也经常通过有限与无限的类比来从事无限性对象的研究。

【例 16】 由于圆可以看成它的内接正多边形当边数趋向无穷时的极限情况,因此,我们就可通过类比由多边形(直线形)的性质联想出圆的有关性质。

例如,依据“三角形的面积等于底与高的乘积的一半”的结论,可以证明:圆内接正多边形的面积等于周长与边心距的乘积的一半。进而,我们就可联想到:圆的面积很可能就等于其周长与半径乘积的一半,即 $S=\frac{1}{2}C \cdot R=\frac{1}{2}(2\pi R) \cdot R=\pi R^2$(如图 2 - 9)。这一结论显然是正确的。

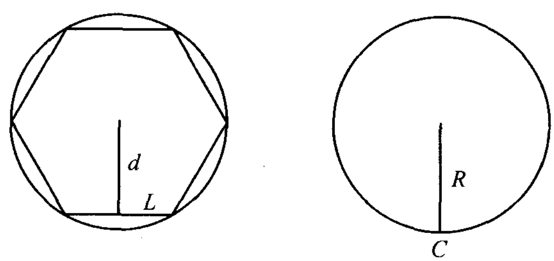


图 2 - 9

【例 17】 对于任意 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 来说,其和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 总是一个确定的数. 这样,我们也就可以考虑无穷求和的问题,即 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$。在高等

数学中，这就是级数的研究。

这时，依据有限和的性质，我们就可联想出级数的有关性质。例如，由

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

就可联想出：

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|。$$

另外，由于定积分也可看成一种"无穷和"，因此我们又可联想出如下的积分不等式：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx(a<b)。$$

然而，必须强调的是，有限与无限的类比只是一种猜测的方法。也就是说，由此所得出的只是可能的结论，它既可能为真，也可能为假，因此我们就不能不加以证明而认定其肯定为真。例如，就有限和而言，结合律为真；但是，对于无穷和来说，我们就不能任意地对加项进行"结合"，否则就会得出 0=1 的荒谬结论：

$$[1+(-1)]+[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots$$
$$=0+0+0+\cdots=0,$$

又

$$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots$$
$$=1+0+0+0+\cdots=1,$$

因此，若有

$$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+\cdots$$
$$=[1+(-1)]+[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots$$
$$=1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots$$

就有　0=1。

【例 18】 著名数学家欧拉对于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 的计算可以看作成功应用有限与无限的类比的典型例子。

在数学的发展过程中，数学家们很早就开始了无穷级数求和问题的研究。如数学家伯努利就曾求得过不少无穷级数的和数；但他始终未能求得由自然数的倒数的平方所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

的和。为了解决这一问题，伯努利曾公开征求过解答。但是直到 18 世纪上半叶，才由欧拉发现了正确答案：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}。$$

欧拉所用的方法是这样的：

由代数的知识知道,如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 次代数方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ $(a_n\neq0)$的 n 个不等于 0 的根,那么方程左边的多项式就可分解为:

$$a_0\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right),$$

特殊地,如果某一多项式方程的根两两互为相反数:$\beta_1, -\beta_1; \beta_2, -\beta_2; \cdots; \beta_n, -\beta_n$,

则相应的 $2n$ 次多项式必可分解为

$$a_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)。$$

而且,由具体计算可知,其二次项 x^2 的系数为:

$$a_2=-a_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right)。$$

现考虑三角方程　　$\sin x=0$。

由于 $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \cdots, n\pi, -n\pi, \cdots$ 都是它的根,因此,就可以把它看成是一个“无限次方程”。为除去零根,可将方程两边除 x,则方程 $\frac{\sin x}{x}=0$ 的根 $\pi, -\pi; 2\pi, -2\pi; \cdots; n\pi, -n\pi; \cdots$ 就两两互为相反数了。

依据前面的讨论,通过有限与无限的类比可以联想出以下的等式:

$$\frac{\sin x}{x}=a_0\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

进而,容易算得上式左端的“多项式”的二次项 x^2 的系数为:

$$-a_0\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right),\text{即}\quad -\frac{a_0}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right);$$

另一方面,由 $\sin x$ 的幂级数展开式又可求得:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots,$$

其中,二次项 x_2 的系数为$\frac{-1}{3!}$,即$-\frac{1}{6}$。

从而,通过比较二次项的系数就有

$$-\frac{a_0}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{6};$$

另外,通过比较常数项又可确定 $a_0=1$。

这样,最终就有:

$$\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{6},$$

即　$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$。

由于上述结果是用类比法得出的,因此就只能说是一个猜想。但是,通过计算,

欧拉发现上式两边的数字直至第六位小数都是相同的(都等于 1.644 934),因此他确信这一结果是正确的。这一结果后来确也得到了严格的证明,对此可参见一般的微积分教程。

第二节　归纳法

所谓归纳,是指经由特例的分析去引出普遍的结论。与类比法相同,归纳法在数学发现中也具有十分重要的作用。如德国数学家高斯就曾说过,他的许多定理都是靠归纳法发现的。德国数学家 I. 舒尔也曾说过:“在数学研究中,非数学的归纳法起着重要的作用。”

一、直接建立在类比之上的归纳

与归纳法相比,类比可以说是由某一特例到另一特例的过渡。例如,利用类比,我们可以由一只天鹅是白的联想到另一只天鹅也是白的。由于普遍是由大量的特例组成的,因此我们常常以类比为基础进行归纳,即由特例引出普遍的结论。例如,依据上面的类比,我们可以进一步引出如下的普遍结论:凡是天鹅都是白的。

【例 1】 如第一节例 1 所述,由二次不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,可以联想出:三次不等式 $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$,四次不等式 $x^4+y^4+z^4+w^4\geqslant 4xyzw(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,w\geqslant 0)$等。进而,以这种类比为基础,我们又可进一步归纳出如下的一般不等式:

$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n\geqslant nx_1x_2\cdots x_n(x_1,x_2,\cdots,x_n$ 皆为非负实数)。

另外,如令 $x_1^n=A_1,x_2^n=A_2,\cdots,x_n^n=A_n$,则就可以由上式引出如下的基本不等式:

$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{A_1A_2\cdots A_n}。$$

这也就是说:n 个非负实数的算术平均数不小于它们的几何平均数。

【例 2】 在 $0<a<1,0<b<1$ 的条件下,容易证明:

$(1-a)(1-b)=1-a-b+ab>1-a-b$。

进而,我们又可证明:

如果 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$,就有 $(1-a)(1-b)(1-c)>1-a-b-c$。

在这一类比的基础上,就可归纳出如下的一般不等式:

如果 $0<a_1<1,0<a_2<1,\cdots,0<a_n<1$,就有 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots-a_n$。

【例 3】 对半角公式稍加变形,就可推出:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}=2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{2+2\cos\alpha}(0<\alpha<90^\circ);$$

进而,又可证明:

$$2\cos\frac{\alpha}{2^2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}。$$

这样,以类比为基础我们就可归纳出如下的一般公式:

$$2\cos\frac{\alpha}{2^n}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n个2}\!\!+2\cos\alpha。$$

二、建立在抽象分析之上的归纳

如果把个别比拟成点,而把相应的普遍结论看作由这些点所组成的直线(射线)的话,那么,上面所说的"直接建立在类比之上的归纳"显然就相当于"两点确定一条直线"。在已经确定了直线上某两个点的位置的情况下,要作出相应的直线显然十分容易;但是,在更多的情况下,归纳的问题并不总是那么简单的,因为即使是十分简单的数学事实,也可能包含相当丰富的数学内容,例如,等式 3+3=6 不仅表明了 6 是 3 的倍数,而且还可以看成著名的哥德巴赫猜想的特例。因此,只有通过适当的抽象分析,已知的数学事实才能被看作一个"点",我们也才有可能由此引出普遍的结论。

应善于观察、实验 与其他学科的研究一样,数学中所说的抽象分析通常也是建立在观察与实验的基础上的,或者说,建立在数学实践的基础上。如欧拉所说:"数学这门科学,需要观察,也需要实验。"另外,法国数学家 C. 厄米特也曾指出:"观察,是精神领域中发明创造的丰富源泉,正像它是可感知的现象世界中的发明创造的丰富源泉一样。"

【例 4】 在一定的意义上,数论可以说是最纯粹的科学,因为除了能起到"智力体操"的作用之外,数论基本上没有找到实际用途。但是,数论中的绝大多数定理又都是通过观察发现的、通过实验而建立的,因此在这个意义上,数论也可称为"经验科学"或"实验科学"。

例如,哥德巴赫猜想在最初就肯定是观察的结果,即如

6=3+3,8=5+3,10=7+3,12=7+5,14=11+3,16=13+3,18=11+7,20=13+7,…。

进一步的实验使人们发现这一现象并不偶然,从而就提出了如下的猜想:

"任何一个大于 4 的偶数都可以表示成两个质数的和。"

应当提及的是,这一猜想的正确性至今尚未得到证明。

又例如,依据 $2^2-1=3$,$2^3-1=7$,$2^5-1=31$,$2^7-1=127$……都是质数的事实,一位名叫马林·默森的法国修道士在 1600 年提出了如下的猜想:

"任何形如 2^P-1(其中,P 为质数)的数(称为默森数,记为 M_P)都是质数。"

但是,后来发现这一猜想是错误的。因为,当 $P=67$ 时,相应的默森数 $M_{67}=2^{67}-1$ 并不是质数。默森的这一错误是可以原谅的,因为要计算出 2 的 67 次幂、并对 $2^{67}-1$ 是否为质数进行检查并不是很容易的。

再例如,大数学家费马也曾犯过类似于默森的错误:费马曾依据

$$2^{2^1}+1=5,2^{2^2}+1=17,2^{2^3}+1=257,2^{2^4}+1=65\ 537$$

都是质数的事实,提出了如下的猜想:

"任何形如 $2^{2^n}+1$(其中 n 为自然数)的数(称为费马数,记为 F_n)都是质数。"

但是,到了 16 世纪中叶,欧拉发现:第五个费马数 $F_5(=2^{2^5}+1=4\ 294\ 967\ 297)$ 并不是质数,而是 641 与 6 700 417 的乘积。

【例 5】 在几何中也可以找到很多在观察与实验的基础上进行归纳的例子。例如,通过实际计算四面体、六面体、八面体、六棱锥、五棱柱及四棱台的顶点数(V)、棱数(E)与面数(F)(如图 2-10),可以得出如下的表格:

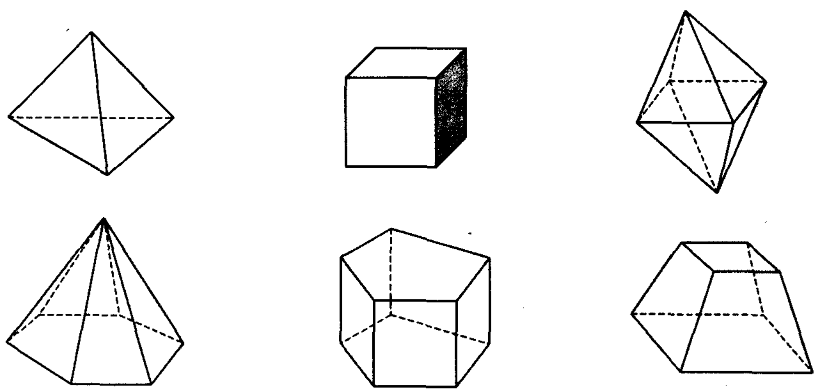


图 2-10

	V	E	F		V	E	F
四面体	4	6	4	六棱锥	7	12	7
六面体	8	12	6	五棱柱	10	15	7
八面体	6	12	8	四棱台	8	12	6

进而,通过对于表中数据的仔细分析,就可以发现如下的关系式:

$$V+F=E+2。$$

通过进一步的实验,我们又可发现这一关系式对任何一个(凸)多面体来说都是成立的。事实上,这一关系式就是著名的"笛卡尔—欧拉公式"。

值得指出的是,观察和实验在数学研究中具有如此重要的地位,事实上也并不足以为奇,因为数学真理是思维对于客观规律的正确反映,有时确实需要通过实验

和观察才能发现。因此，在数学研究中我们就应善于观察、精于实验。

应具有正确的思想方法　观察和实验为发现提供了可能性，但是，为了使这种可能性成为现实，则还需要有正确的思想方法。就归纳而言，以下几点是较为重要的：

第一，应善于在各种对象之间进行比较。

【例 6】　古希腊人早就证明了质数的数目有无穷多个，但是能否找出质数分布的一般规律呢？(前面所介绍的默森及费马关于质数的猜想，事实上都是寻找这种规律的具体努力。)或者说，我们能否求出在给定范围内质数相对于全部正整数所占的百分比呢？

由实际计算可以发现：100 以内有 26 个质数，1 000 以内有 168 个质数，1 000 000 以内有 78 498 个质数，1 000 000 000 以内有 50 847 478 个质数。将质数的个数分别除以相应范围内正整数的个数，就有相应的比率，如下表所示：

数值范围(1～N)	质数数目	比率
1～100	26	0.260
1～1 000	168	0.168
1～10^6	78 498	0.0784 98
1～10^9	50 847 478	0.050 847 478

显然，单纯依靠这些数据我们很难提出任何明确的结论或猜想；但是，如果把它们与相应的自然对数 $\ln N$ 的倒数(见下表)加以比较，就可得出历史上最值得称道的发现之一：

“从 1 到任何自然数 N 之间所含质数的百分比，近似地等于 N 的自然对数的倒数。”

数值范围(1～N)	比率	$\frac{1}{\ln N}$	偏差(%)
1～100	0.260	0.217	20
1～1 000	0.168	0.145	16
1～10^6	0.078 498	0.072 382	8
1～10^9	0.050 847 478	0.048 254 942	5

这一结论已由法国数学家阿达玛和比利时数学家布丰在 19 世纪末证实。

【例 7】　少年时代的高斯曾十分巧妙地算得了连续的自然数的和：

$\left(S_1(n)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right)$。这一事迹至今仍然常常为人们所称道(见第 7 章第一节)；但是，我们又应怎样去计算连续自然数的平方和($S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$)呢？又应当怎样去计算它们的立方和($S_3(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3$)呢？善于比

较在此也能给予我们很大的帮助。

下表列出了部分的 $S_1(n)$ 和 $S_2(n)$：

N	1	2	3	4	5	6	7
$S_1(n)$	1	3	6	10	15	21	28
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	91	140

如果由相应的 $S_2(n)$ 减去相应的 $S_1(n)$ 就有：

N	1	2	3	4	5	6	7
$S_2(n)-S_1(n)$	0	2	8	20	40	70	112

由这些数据仍不易发现明显的规律。但是，如果我们求取 $S_2(n)$ 与 $S_1(n)$ 的比值，则有：

N	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{S_2(n)}{S_1(n)}$	$1=\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$	$3=\frac{9}{3}$	$\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$	$\frac{91}{21}=\frac{13}{3}$	$5=\frac{15}{3}$

由此我们就可立即提出如下的猜想：

$$\frac{S_2(n)}{S_1(n)}=\frac{2n+1}{3}。$$

进而，依据 $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$，就可推出：

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

显然，在证明了 $S_2(n)$ 的计算公式以后，我们就很容易产生这样的想法：只需将 $S_3(n)$ 与 $S_2(n)$ 作比值，就可得出 $S_3(n)$ 的计算公式。但是，由以下的数据可以看出，这一努力并没有能够得到预期的结果：

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	91	140	204
$S_3(n)$	1	9	36	100	225	441	784	1296
$\frac{S_3(n)}{S_2(n)}$	$1=\frac{3}{3}$	$\frac{9}{5}=\frac{9}{5}$	$\frac{18}{7}=\frac{2\times 9}{7}$	$\frac{10}{3}=\frac{3\times 10}{9}$	$\frac{45}{11}=\frac{5\times 9}{11}$	$\frac{63}{13}=\frac{7\times 9}{13}$	$\frac{28}{5}=\frac{7\times 12}{15}$	$\frac{103}{17}=\frac{12\times 9}{17}$

然而，如果将 $S_3(n)$ 与 $S_1(n)$ 加以比较，则有：

N	1	2	3	4	5	6	7
$S_1(n)$	1	3	6	10	15	21	28
$S_3(n)$	$1=1^2$	$9=3^2$	$36=6^2$	$100=10^2$	$225=15^2$	$441=21^2$	$784=28^2$

从而就立即可以提出 $S_3(n)=(S_1(n))^2$ 的猜想,即:

$$S_3(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}。$$

由此可见,即使在数学研究中,教条主义的态度也是行不通的。另外,尽管数学发现中的确包含有偶然的成分,或者说,直觉在其中起了很大的作用。但是,无可否认的是,数学发现中也包含有必然的因素,假若不具有广博的知识,不进行艰苦的劳动,就不可能作出具有重大意义的发现。

第二,按照对象的构成方法去进行分析,常常也有益于普遍规律的发现。

【例 8】 在例 5 关于多面体顶点数、棱数和面数关系的研究中,要提出"笛卡尔—欧拉公式"应当说并不十分容易,因为由所列出的数据,人们往往不能立即发现所说的规律。但是,如果我们能辅以"生成"的考虑,上述公式的得出就十分自然了。所谓"生成"是指如何由较简单的多面体构造出较复杂的多面体。即如在原有的多面体之外增加一个顶点,并将它与靠近的那一面的各个顶点依次相连接,这样就可得到一个新的较复杂的多面体(如图 2-11)。

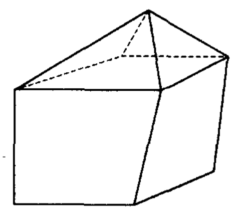


图 2-11

现在,我们就可在这种"生成"的考虑下进而去研究顶点数 V、棱数 E、面数 F 的变化情况了。就图 2-11 所示的情况容易看出,V,E,F 的增加数分别为 $1,4,(4-1)$;从而有 $1+(4-1)=4$。就一般情况而言,如果假设与新顶点靠近的那个面有 k 个顶点,那么,V,E,F 的增加数将分别为 $1,k,(k-1)$,这时同样有 $1+(k-1)=k$. 从而我们就可引出这样的结论:在"生成"的过程中,(凸)多面体顶点数和面数的改变量的和等于棱数的改变量。

显然,由所说的事实我们可引出如下的结论:对于(凸)多面体来说,$(V+F-E)$ 是一个常量。正因为如此,为了得出所要寻找的普遍规律,我们只需以某一简单的多面体为对象计算出它的顶点数、棱数和面数就可以了。例如,对于四面体而言,$V=4,F=4,E=6$,从而就有 $(V+F)-E=2$。这就是凸多面体顶点数、棱数和面数间的普遍关系。

【例 9】 试研究 n 个处于一般位置(既没有两个平面互相平行,也没有三个平面共线,或四个平面共点)的平面把空间分割成多少个部分?

这一问题是比较复杂的,为此,按照前面关于类比法的分析,我们在此不妨先来研究平面几何中与此相类似的问题,即首先研究 n 条处于一般位置(既没有两条直线互相平行,也没有三条直线共点)的直线把平面分割成多少个部分?

对于后一问题,我们又可采用"生成"的观点去进行研究,即具体地去研究当分割直线的数目 n 逐次增加时,分割所得出的部分平面的数目 S_n 的变化情况。

就图 2-12 所示的情况容易看出,在分割直线的数目 n 由 3 增加到 4 时,分割所

得的部分平面的数目 S_n 的增加数也是 4，而这事实上也就是新增加的第四条直线 l_4 被原有的三条直线分割所得的部分直线数，因为，每一个这样的部分直线都把原先的一个部分平面分割成了两个新的部分平面。

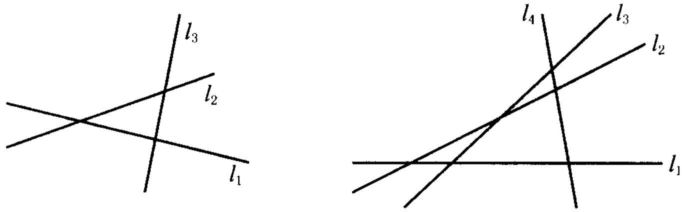


图 2-12

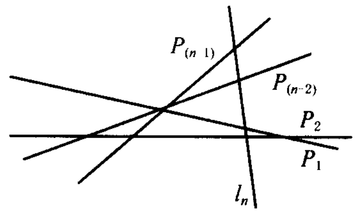


图 2-13

显然，依据后一分析，我们也就不难引出一般的结论：现设在原有的$(n-1)$条分割直线的基础上又增加了一条新的分割直线 l_n，由于这一直线 l_n 被原有的$(n-1)$条直线分成了 n 个部分直线（因为共有$(n-1)$个交点，如图 2-13），而每一个这样的部分直线又把原先的一个部分平面分割成了两个新的部分。因此，就增加了 n 个部分。这样，按照"生成"的考虑，n 条处于一般位置的直线就把平面分割成了 $1+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1$ 个部分。

在解决了上述问题以后，就可进一步研究平面分割空间的问题。显然，这时我们也可按照"生成"的观点去进行分析。但是，依据类比法中所提到的"求同存异"的原则，我们又应当特别注意：现在逐次增加的是平面（"分割平面"），而不再是直线（"分割直线"）。

具体地说，通过类比容易想到：如果我们在原有的$(n-1)$个分割平面的基础上再增加一个新的分割平面 α_n，空间被分割所成的部分数 V_n 的增加量就等于这一平面 α_n 被原有的$(n-1)$个分割平面分割所成的部分平面数。由于没有两个平面是平行的，也没有三个平面是共线的，或四个平面是共点的，因此这$(n-1)$个平面与 α_n 共有$(n-1)$条交线；而依据以上的讨论我们已经知道，这$(n-1)$条交线把第 n 个平面 α_n 分割成了 $\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}+1=\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个部分。这也就是说，在增加了第 n 个分割平面以后，分割所得出的部分空间的数量增加了 $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 个。

从而，依据"生成"的考虑，我们就可得出，n 个处于一般位置的平面把空间分割成了

$$1+1+\left(\frac{2(2-1)}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$$

$$=1+\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+(1+1+\cdots+1)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$=1+\frac{n(n^2+5)}{6}$个部分。

由上述例子可以看出，“生成”的考虑不仅可能导致新的发现，并且常常为这些新的规律的证明打下了直接的基础。

第三节　既应学会猜测，又应学会论证

以上已对两种主要的猜测方法——类比法与归纳法——进行了介绍和分析。由于猜测的方法并不是完全可靠的，因此，我们必须对猜测的结果进行检验和论证。这样，在猜测的方法与论证的方法之间也必定存在一定的联系。

一、类比与化归

类比法与化归法的关系　如前所述，类比法是一种通过比较，由已知的事实(规律、方法)引出新的猜想的方法，是由已知向未知推广与发展的方法，因此，在这样的意义上，类比法与第一章中所介绍的化归法就是直接相对立的。因为，化归法所强调的是由未知向已知的转化，而且就其最终表现形式而言，化归法又显然属于论证的范畴。但是，在实际的数学研究中，类比法与化归法又往往是互相依赖、互相渗透的。例如，类比法常常为化归法的实现指明了可能的方向，而化归则为类比所得出的猜测提供了必要的证明。因此，化归与联想就可被看成一个矛盾的两个侧面。

【例 1】　依据导数的定义，容易证明：

定理甲：常函数的导数为 0。即若 $f(x)\equiv c, x\in(a,b)$，则 $f'(x)\equiv 0, x\in(a,b)$。

定理乙：一次函数的导数为常数，即若 $f(x)=kx+h, x\in(a,b)$，则 $f'(x)\equiv k$，$x\in(a,b)$。

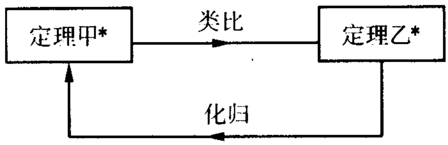
其次，利用前面所说的拉格朗日中值定理可以立即证明：定理甲的逆定理(简记为定理甲*)为真. 即若 $f'(x)\equiv 0, x\in(a,b)$，则 $f(x)\equiv c, x\in(a,b)$。

从而，由类比我们也就容易联想到：定理乙的逆定理(简记为乙*)很可能也为真，即若 $f'(x)\equiv k, x\in(a,b)$，则 $f(x)\equiv kx+h, x\in(a,b)$。

最后，为了证明这一猜想则可采用如下的化归法：

设 $f'(x)\equiv k,x\in(a,b)$。令 $g(x)=f(x)-kx$，显然有：$g'(x)=f'(x)-k\equiv 0$，$x\in(a,b)$。从而，依据已证明的定理甲*，就有：$g(x)\equiv h,x\in(a,b)$即 $f(x)=kx+h,x\in(a,b)$。定理乙*得证。

综上可见，类比与化归的实际应用事实上就构成了如下的“循环”：



联系的观点　从更高的层次看，类比法与化归法有着明显的共同点：它们所强调的都是事物的联系，即要求我们用相互联系的观点、而不应用孤立的眼光来看待问题，既要善于由已知推向未知，又要善于由未知转向已知。因此，从方法论的角度看，我们又可提出如下的一般原则：

第一，在解决问题时我们应当注意分析其他有关问题。正如笛卡尔所指出的，“当一个问题出现时，我们应当能够及时地观察一下，是否首先考察某些别的问题会带来好处，并想一下有哪些别的问题，以及按什么顺序去考察它们。”

例如，从这样的角度去分析，在求解数学问题时我们就应善于引进“辅助问题”，更应善于利用辅助问题去解决原来的问题。这就是说，我们不仅可以通过与辅助问题的类比去引出可能的解答及可能的解题方法（这属于“发现”的范畴），而且也应积极地去探讨能否通过向辅助问题的化归最终解决眼前的问题（这属于“论证”的范畴）。

第二，前面所已给出的关于化归法及类比法的诸多分析，如由未知向已知、由难到易、由繁到简的化归，由一般到特殊的化归，平面与空间的类比，数与形的类比，有限与无限的类比，等等，事实上也都可以看作关于如何去引进和利用“辅助问题”的指导性意见。除此以外，以下是一些更为一般的建议：

从未知成分着眼去寻找辅助问题：你曾经遇到过具有相同类型的未知成分（未知量或结论）的问题吗？

也可以从已知成分出发去寻找：你曾经遇到过具有相同类型的已知成分（已知量或条件）的问题吗？

还可以就问题的类型进行分析：这是哪种类型的问题？你曾经遇到过同一类型的问题吗？那些问题又是怎样解决的？

最后，我们还可考虑：你曾经遇到过与此相关（或者，更为特殊或更为一般）的问题吗？那些问题又是怎样解决的？

第三，在某一问题得到解决以后，我们又应注意分析能否由此而引出新的结果，即能否对所已取得的成果作进一步的发展和推广。具体地说，除去前面所已指出的方向，即由特殊到一般、由平面到空间、由有限到无限的推广以外，还可考虑以下的

问题：

能否得出更强的结论或更多的结果？能否在较弱的条件下得出同样的结果？能否由所得的结果去提出新的猜想？能否以此为依据去重新判断先前所提出的别的猜想？

当然，在解决新提出的问题时，我们又应充分利用已有的成果，即应当尽可能地采取化归的方法。这样，数学的认识也就表现为一种“螺旋式”的上升过程。

第四，除去对于具体结果的推广与发展以外，我们还应在方法论上作出必要的总结与发展，即应当考虑由已解决的问题在方法论上能获得的启示和教益。这时，考虑以下一些问题是有益的：

什么是其中的主要困难？什么是解题过程中的关键性步骤？哪些地方可以作进一步的改进？又有什么东西在以后的类似情况下仍能用到？

这样，正如笛卡尔所说：“我所解决的每一个问题都将成为一个模式，以用于解决其他问题。”

二、归纳法与数学归纳法

犹如类比法与化归法的关系一样，在实际的数学研究中，归纳法与数学归纳法也可被看成一个矛盾的两个侧面。

关于数学归纳法的分析　如前所述，归纳法是指由特例的分析去引出普遍的结论。但是，我们怎样才能保证由此所得出的结论的可靠性呢？由于普遍是由大量的个例所组成的，因此容易想到：归纳的正确性主要取决于所得出的结论是否具有“稳定性”，即能否由已研究过的特例“稳定地过渡”到其他尚未研究过的特例。

当然，为了保证结论的可靠性，仅仅停留于这种朴素的分析是不够的，而必须形成严格的数学方法。这就是数学归纳法。

应用数学归纳法时，必须注意以下几点：

第一，如何保证结论的正确性。所说的关于“稳定性”的分析显然不能遗漏任何一个特例。因此，就数学归纳法的应用而言，一个必要的条件就是：所考虑的对象应是“可排”的，也即可以按照自然数的顺序予以编号④。这样，只要按照这种编号顺序去研究结论的“稳定性”（能否从第 n 个对象“稳定地”过渡到第 $(n+1)$ 个对象），就可保证不会遗漏掉任何一个特例。

第二，在实际的数学研究中，由于我们往往是通过特例的分析引出普遍结论的，因此主要的问题就在于如何证明结论的“稳定性”。但是，如果就证明的全部过程而言，我们又必须首先就某个特例检查结论的正确性。不然的话，我们就丧失了归纳

④　在现代数学的研究中，还有所谓的“超穷归纳法”。对此就不再予以介绍了。

的基础。另外，出于严格性的考虑，我们又应对第一个对象进行检验，因为只有这样，才能保证我们的分析没有遗漏掉任何一个特例。

【例 2】 对于第二节例 2 中所提到的以下的一般不等式：

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots-a_n(n\geqslant 2,0<a_1<1,\cdots,0<a_n<1)$

可以用数学归纳法证明如下：

由于我们已经知道在 $n=2$ 时结论为真，因此，这里惟一需要做的工作就是在$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-a_1-a_2-\cdots-a_k$ 为真的假设下去证明：$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{k+1})>1-a_1-a_2-\cdots-a_k-a_{k+1}$。

证明：

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>(1-a_1-a_2-\cdots-a_k)(1-a_{k+1})$（归纳假设）$=1-a_1-a_2-\cdots-a_k-a_{k+1}+(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})>1-a_1-a_2-\cdots-a_k-a_{k+1}$。

所以原命题对所有的自然数都为真。

归纳法与数学归纳法的关系 由于数学归纳法所证明的结论是完全可靠的，因此，与归纳法不同，数学归纳法就应被归属“论证”的范畴，而不是猜测的方法。但是，由前面的例子可以看出，在归纳法与数学归纳法之间也存在有互相依赖、相互渗透的辩证关系。具体地说，归纳法与数学归纳法之间存在着如下的自然联系：数学归纳法所证明的往往是通过归纳所得出的猜测，而归纳法所得出的猜测则又必须用数学归纳法来加以证明，因此归纳法就是数学归纳法的必要前提，而数学归纳法则是归纳法的自然发展。另外，更为重要的是，归纳的过程往往为运用数学归纳法证明相应的结论提供了直接的基础；反之，证明的过程又可以加深我们对于原来猜测的理解，这其中往往包含了对于原来猜测的改进。例如，只有通过证明，我们才能真正理解为什么应将自然数的立方和 $S_3(n)$ 与自然数的和 $S_1(n)$ 比较，而不是与自然数的平方和 $S_2(n)$ 加以比较。另外，也只有通过证明，我们才能认识到笛卡尔—欧拉公式（如第二节中的例 5 与例 8）只是对于凸多面体才是有效的，因为所说的“生成”分析显然只适用于凸多面体。

综上所述，归纳法与数学归纳法同样也构成了数学方法论研究中的一对矛盾。

三、猜测的方法与论证的方法

猜测的方法与论证的方法的关系 上述关于类比法与化归法、归纳法与数学归纳法之间辩证关系的分析事实上也适用于一般的猜测方法与论证方法。这就是说：

第一，合理的猜测为相应的论证提供了必要的基础。因为在解决某一问题前，你不仅必须先猜测出可能的解答（如所要证明的“定理”），而且还必须猜测出可能的解决方法（如证明的主导思想）。

第二，论证是猜测的必要发展。因为猜测的方法并不能提供完全可靠的结论，而只有通过论证，我们才能对可能的解答与可能的解决方法作出检验，并作出必要的改进，直至最终获得可靠的解决。由此可见，论证的过程事实上也包含有发现的因素。

数学研究活动的一般模式　由于数学研究活动是由发现与论证这样两个过程组成的，因此就可简单地表述为：

[具体问题具体素材] —发现（类比、归纳等）→ [猜想] —论证（化归、数学归纳法等）→ [结论]

当然，由前面的分析我们又已知道，在实际的数学研究中论证与发现的过程往往是互相依赖、相互渗透的，而且，最终所获得的常常不是原来的猜测，而是经过改进了的结论。因此，数学的研究活动事实上就是一个包含有多次反复的复杂过程。即：

[具体问题具体素材] —发现→ [可能的结论] —发现↔论证（检验、改进）→ [改进了的猜想] —论证→ [结论]

四、既学会猜测，又学会论证

依据前面的分析，在方法论上我们又可引出如下的结论：

应尽可能增强猜测的可信性　只有尽可能地增强猜测的可信性，才能为相应的论证提供理想的基础，并尽可能地避免无效劳动。

为了达到上述目标，一个重要的环节显然在于掌握"好的"猜测方法；同样重要的是，在具体地对猜测进行证明前，我们又应适当地对此加以检验，以增强猜测的可信性。

这样，就发现方法的实际应用而言，也就应当包括检验的方法。具体地说，

第一，如果我们所得出的是一个建立在归纳法之上的普遍结论，那么，在具体运用数学归纳法对此进行证明以前，应当先用一些新的特例对这一普遍结论作出检验：如果检验的结果为真，就增强了这一普遍结论的可靠性；如果检验的结果为假，就无须徒劳地对此进行证明。

第二，与上述经由新的特例去进行检验的方法相比，以下方法是更为有效的，就是如果我们能够发现另一种合理的猜测方法，它同样导致了原来的结论，那么，这一结论的可靠性就大大地增强了。例如，在复杂的计算中，如果我们用两种不同的计算方法计算得出了同样的答数，一般就不会再对这一答数持怀疑态度了。显然，欧拉关于 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 的验算就可被看成这种方法的一个典型例子。

【例 4】　如果自然数 P 与 $(P+2)$ 都是质数（如 5 与 7，11 与 13 等等），我们就称之为"双生质数"。

依据观察与实验，人们提出了“存在无穷多组双生质数”的猜想。因为人们发现，无论我们沿自然数序列走得多远，总还能够遇到这样的双生质数，如 17 和 19，29 和 31，41 和 43，等等。

上面的“说明”也许不能令人完全信服；但是，在看到了以下的“论证”以后，相信很多人的看法就会有所改变(虽然这一猜想至今仍未得到证明)：

“P 是质数”与“$(P+2)$是质数”这两个事实可以被认为是完全独立的；又由于小于 n 的质数的频率约为$\frac{1}{\ln n}$，因此，小于 n 的双生质数的频率就约为$\frac{1}{(\ln n)^2}$. 但这事实上就蕴涵了存在无穷多个双生质数的结论。

【例 5】 依据观察和实验可以发现，在凸多面体的顶点数 V 与面角的和数 $\sum a$ 之间存在如下的关系：

$2\pi V-\sum a=4\pi.$

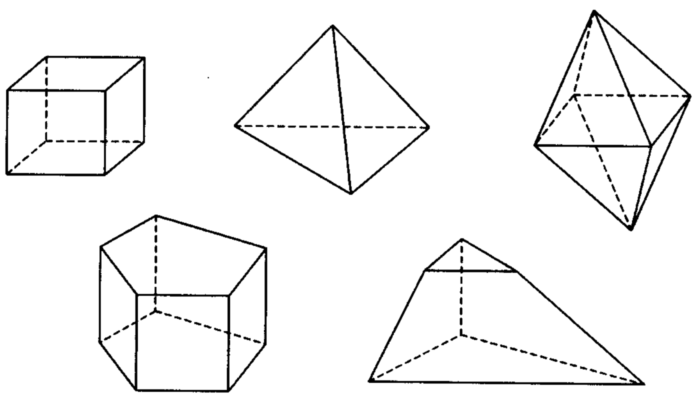


图 2-14

例如，由图 2-14 即可看出：

	V	$\sum a$	$2\pi V$	$2\pi V-\sum a$
长方体	8	$6\times2\pi=12\pi$	16π	4π
四面体	4	$4\pi=4\pi$	8π	4π
八面体	6	$8\pi=8\pi$	12π	4π
五棱柱	10	$5\times2\pi+2\times3\pi=16\pi$	20π	4π
三棱台	6	$3\times2\pi+2\pi=8\pi$	12π	4π

由于这一猜想与笛卡尔—欧拉公式一样都与多面体的顶点数等有关，因此，不妨对两者的联系作一分析：

如果以 $S_1,S_2,\cdots,S_F$ 分别表示多面体的 F 个面的边数，因为 n 边形的内角和为

$(n-2)\cdot\pi$. 所以

$$\sum a=\pi\cdot(S_1-2)+\pi\cdot(S_2-2)+\cdots+\pi\cdot(S_F-2)=\pi(S_1+\cdots+S_F-2F)$$

其中$(S_1+S_2+\cdots+S_F)$代表了所有 F 个面的边数的和。由于在这个总数中多面体的每一条棱都被计算了两次,因此就有

$$S_1+S_2+\cdots+S_F=2E$$

代入上式就有: $\sum a=2\pi(E-F)$.

将这一关系式代入表示上述猜想的关系式 $2\pi V-\sum a=4\pi$,我们就得到了

$$2\pi V-2\pi(E-F)=4\pi,$$

即 $F+V=E+2$.

即笛卡尔—欧拉公式。

由此可见,上述猜想事实上是与笛卡尔—欧拉猜想相互等价的。这种"异途同归"的现象显然增强了所说猜想的可信性。

第三,在很多情况下,我们还可用所谓的"探索性演绎法"(拟经验法)去对已得出的猜想作出检验:在此我们不是直接对所已得出的猜想 A 去进行检验,而是由 A 出发去演绎出进一步的结论 B、C、D……如果这些结论中的某个结论已被证明为假,则就可以断言原来的猜想 A 为假;而如果结论 B、C、D……都为真,则 A 为真的可能性就增大了。

应当指出,古希腊的帕普斯已总结出了这样的方法。他说:"由你的猜测——假设它为真——逐一地去引出结论。如果你得到了一个假的结论,那么你的猜测就是假的;如果你得到一个无疑为真的结论,你的猜测就可能为真。"在现代数学的发展史中,由于数学的抽象程度不断提高,因此,这种探索性演绎法也就显得越来越重要。例如,现代集合论研究中的不少公理(如选择公理、可化归公理等),其可靠性就都建立在试探性演绎法之上。另外,I. 拉卡托斯等数学哲学家更因此而断言:"数学是'拟经验'的"。

既学会猜测,又学会论证　综上可见,为了搞好数学研究,我们既应学会猜测,又应学会论证。特殊地,为了培育既有创造发明能力、又有逻辑论证能力的数学师资和学生,我们又应当在中学和大专院校的数学教学和教材中,采取归纳与演绎交互作用的原则。这就是说,我们不仅应教会学生运用科学归纳法去猜结论、猜条件、猜定理、猜证法,而且还要让他们学会从探索性演绎法过渡到纯形式的演绎法,能够把预见到的合理命题或定理的证明一丝不苟地建立在逻辑演绎基础上。

其次,依据前面的分析,我们还可对数学的严格性问题作一分析。众所周知,数学建立在严格论证的基础之上。但是,数学研究又并不总是那么严格的。因为只有依靠大胆的探索和想像,我们才能发现真理,又只有经过反复的试验和改进,我们才能最终找到解决问题的有效途径和正确的解答。因而,严格的逻辑分析就必须辅以

大胆的探索和尝试。也就是说，在数学研究中我们既应力求严格，又应不为严格性的要求所束缚。

最后，正如波利亚所指出的，在数学研究中我们应当采取"谨慎的乐观主义态度"。也就是说，我们应对自己的能力有信心，大胆地去进行猜测，以乐观的精神去进行论证；但是，又不应轻信任何事情，并应随时准备修正我们的任何一个信念。总之，"坚持真理，并始终抱有乐观的精神"是一个好的数学工作者所应具有的态度。

第 3 章

美的追求:数学发展的动力之一

自希尔伯特 1900 年在巴黎国际数学家代表大会上作了著名的讲演《数学问题》以来,数学问题对于数学发展的重要意义已经得到了公认。希尔伯特指出:“某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题的缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”但是,数学中的问题是从何而来的呢?或者说,什么是数学问题的源泉呢?对此,希尔伯特回答道:“在每个数学分支中,那些最初、最老的问题肯定是起源于经验,是由外部的现象世界所提出的。……但是,随着一门数学分支的进一步发展,人类的智力,受着成功的鼓舞,开始意识到自己的独立性。它自身独立地发展着,通常并不受来自外部的明显影响……其间,当纯思维的创造力进行工作时,外部世界又重新开始起作用,通过实际现象向我们提出新的问题,开辟新的数学分支。”因此,数学问题就具有两个不同的源泉:外部的源泉与内部的源泉。而这事实上也就是数学发展的两种动力,即社会实践与内在因素的作用。

正如希尔伯特在上述演讲中所指出的,数学发展的外部动力与内在动力是互相渗透、交替着发挥作用的,但两者之间又存在着明显的区别,因此,从方法论的角度看,就有必要从不同的角度对数学的发展规律进行研究,也即应当区分出两种不同的数学方法论:“宏观的数学方法论”与“微观的数学方法论”。第一,数学发展规律的研究,如果撇开数学的内在因素不提,那是属于“宏观的数学方法论”的范畴。第二,数学工作者研究数学课题时也可以不考虑数学发展的外在推动力,专就数学内部体系结构中的特定问题来分析研究。这样,就需要考虑采用最有效的数学研究方法,需要懂得数学发现与数学创造等法则。这些属于研究者个人必须遵循的方法与法则的研究,可以称为“微观的数学方法论”。

由于篇幅的限制,本书主要讨论微观的数学方法论。特殊地,本章将从微观的数学方法论这一角度对美学因素在数学发展与数学发现(创造)中的作用进行分析;另外,在这一章中,我们也将对逻辑与直觉在数学发现中的辩证关系作出分析。

第一节　美学因素在数学发展中的作用

一、数学与美

数学中是否包含美的因素？对此，大部分学者的回答是肯定的。例如，古代的哲学家、数学家普洛克拉斯早就断言："哪里有数，哪里就有美。"古希腊最伟大的哲学家亚里士多德也曾指出，"虽然数学没有明显地提到美，但数学与美并不是没有关系的，因为，美的主要形式就是秩序、匀称和确定性，而这些就是数学所研究的原则"。现代数学家关于数学美的论述更是不计其数。如现代最伟大的数学家、物理学家之一彭加勒就曾写道："一个名副其实的科学家，尤其是数学家，他在他的工作中体验到与艺术家一样的印象，他的乐趣和艺术家的乐趣具有相同的性质，是同样伟大的东西。"而这种"伟大的东西"就是与艺术美可以相提并论的科学（数学）美。另外，英国著名哲学家、数理逻辑学家罗素则更把数学的美形容为一种"冷而严肃的美"。他写道："数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也具有至高的美，就像雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美不是投合我们天性的微弱的方面，这种美没有绘画或音乐那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完满的境地。"

数学的美无疑给了数学家们以极大的精神享受，但是，更为重要的是，美学的因素也在一定程度上影响了数学的发展，因为，数学家们常常依据美学上的考虑来决定自己的研究方向。

具体地说，由于数学的发展具有一定的相对独立性，因此数学家们在对自己的研究课题进行选择时就具有很大的"自由性"。例如，他们之所以研究某一问题，很可能就不是由于实际的需要，而纯粹出于个人的兴趣。那么，数学家们是怎样来决定自己的选择的呢？或者说，他们是怎样保证自己的研究"富有成果"的呢？这里，一个重要的因素就是美学上的考虑。例如，著名数学家冯·诺依曼曾写道："我认为数学家无论是选择题材，还是判断是否成功的标准，主要的都是美学的。"他又说道："数学家成功与否及他的努力是否值得的主观标准，是非常自足的、美学的，不受（或近乎不受）经验的影响。"（因此，冯·诺依曼断言："数学思想一旦……被构思出来，这门学科就开始经历它本身所特有的生命，把它比作创造性的、受几乎一切审美因素支配的学科，就比把它比作别的事物特别是经验科学要更好一些。"）另外，彭加勒则更明确肯定了"美学的考虑"与"理论的富有成果性"之间的关系。他写道："数学家们非常重视他们的方法和理论是否优美，这并非华而不实的作风，那么，到底是什么使我们感到一个解答、一个证明优美呢？那就是各个部分之间的和谐、对称，恰到

好处的平衡。一句话，那就是井然有序，统一协调，从而使我们对整体以及细节都能有清楚的认识和理解，而这正是产生伟大成果的地方。事实上，我们越是能一目了然地看清这个整体，就越能清楚地意识到它与相邻的对象之间的类似，从而就越有机会猜出可能的推广结论。我们不习惯放在一起考虑的对象之间不期而遇所产生的美，这使人有一种出乎意料的感觉，而这也是富有成果的，因为它为我们揭示以前没有认识到的亲缘关系。甚至方法简单而问题复杂这种对比所产生的美感也是富有成果的，因为它使我们想到产生这种对比的原因，往往使我们看到真正的原因并非偶然，要在某个预料不到的规律中才能发现。”

因此，美学的考虑是决定数学发展的一个重要因素，对此更有必要进行深入的分析和研究。⑤

二、数学美的客观内容与美的追求对于数学发展的促进作用

我们将通过对于数学美的客观内容的分析来弄清美的追求对于数学发展的促进作用。

与任何美感相同，人们对于数学的美感也具有强烈的感情色彩，而且，不同的人关于数学美的标准也是各不相同的；但是，从整体上说，数学美既不是虚无飘渺、忽有忽无的东西，也不是纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有其确定的客观内容。由于数学的发展（以及人类文明的进步），数学美的概念也有了一定的发展和演变，但是，它的基本内容又是相对稳定的。这就是：对称性、简单性、统一性与奇异性。

对称性（匀称性）　从原始意义上说，对称性是指组成某一事物或对象的两个部分的对等性。从古希腊的时代起，对称性就被认为是数学美的一个基本内容。例如，毕达哥拉斯就曾说过：“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形。”因为，这两种形体在各个方向上都是对称的。另外，由于人们总是把完善、美、秩序等与对称的概念联系在一起（与此相反，不对称的概念则往往与变动、偶然、自由等相联系），因此，在古希腊的学者们（例如，亚里士多德）看来，天体的运动就必然采取圆周运动的形式，否则就降低了其“至高无上”的完美性。

从数学的发展历史看，对于对称美的追求曾在一定程度上促进了数学的发展。

【例 1】　除实际需要以外，逆运算（如减法、除法等）的考虑也是造成数系不断扩

---

⑤　应当指出，某些数学家甚至把“美学的考虑”置于高于一切的地位。例如，数学家 L. 斯思就曾指出：“在数学定理的评价中，审美的标准既重于逻辑的标准，也重于实用的标准；美观与高雅对数学概念的评价来说，比是否严格正确、是否可能应用都重要得多。”这种“美学至上”的观点是错误的，因为，数学的“审美标准”与“实践的标准”事实上是互相联系的；而且，美学的考虑之所以有意义主要也就因为它能预示相应的研究是否会“富有成果”。对此可参见下面的分析。

展(例如,由正数到有理数、整数到分数等)的重要原因之一,而这事实上就是对于(运算与逆运算的)对称性的一种追求。

【例 2】 射影几何的建立在一定意义上也可看成因追求对称美所形成的一种发展。

众所周知,在欧氏平面几何中,点与直线的位置并不是完全对称的,因为,过两点总可以作一条直线,而任意两条直线则未必一定有交点(如果它们互相平行的话)。为了解决这一问题,法国数学家德沙格提出了如下的大胆设想:"与圆相同,直线也是一种封闭图形:在每条直线上都有一个无穷远点,它就是直线两端的连接点,而且,这个无穷远点也是互相平行的直线的交点。"

正是在上述假设的基础上,德沙格初步发展了射影几何理论。与欧氏几何相对照,射影几何的一个重要特点就是点与直线的对称性:由于引进了无穷远点,在射影几何中点和直线的地位就是完全对称的。例如,两点定一线,两线定一点;不共线的三个点惟一地确定一个三角形,不共点的三条直线惟一地确定一个三角形;等等。更为一般地说,在射影几何中已有如下的"对偶原理":在涉及平面图形的定理中,如果把其中的"点"换成"直线","直线"换成"点",并对其从属关系作出相应的变动,那么,由此所得出的新命题就仍然是射影几何的定理。例如,由著名的德沙格定理——"如果两个三角形对应顶点的连线共点,则其对应边的交点共线"——出发,利用对偶原理就可得出如下的"对偶定理":如果两个三角形对应边的交点共线,则其对应顶点的连线共点。由于对偶原理所反映的已不再是对象之间的联系,而是定理间的联系(这就是所谓的"元定理",参见第 4 章第二节),因此,它的重要性远远超出了一般的定理;而由上面的分析可以看出,这一原理就是追求对称美的一个直接结果。

【例 3】 我们还可以从对称美的追求这一角度来说明自然对数的发展。众所周知,在高等数学的研究中,人们经常采用的是自然对数,也即是以 e(这是一个无理数,它的近似值为 2.718 2…)为底的对数,而不是以 10 为底的(常用)对数。人们为什么会作出这样的选择呢?对此有各种可能的解释,其中之一就是出于对称性的考虑。

我们知道,对数的引进对于简化运算有很大的好处。例如,借助于对数,我们可以将乘、除运算分别简化为加、减运算。对数运算的这种优越性事实上是由幂的运算性质所决定的,因为,所谓"求对数"(例如求 $\log_a N=b$)无非就是将一个数表示成幂的形式(即如 $N=a^b$)。从实际计算的角度看,以 10 作为对数的底是十分方便的,因为这时我们可以立即求得任何一个正数(例如,34 617 或 0.001 27)的对数的首数(4 及−3)。但是,从美学的角度看,常用对数却不是十分理想的,因为,第一,真数 N 及其常用对数 $\lg N$ 的增长表现出明显的不对称性。例如,当 N 由 1 增大到 10 000 时,常用对数 $\lg N$ 的增长却只有(4−0=)4。第二,当真数均匀地增长时,其对数的

增长却是不均匀的。例如

N	ΔN(增长数)	$b=\lg N$(近似值)	Δb(增长数)
10		1	0.301 0
20		1.301 0	
30		1.477 1	0.176 1
40	=10	1.602 0	0.124 9
…		…	…
90		1.954 2	
100		2	0.045 8

为了克服这种不对称性,可以尝试采用较小的底数(为了讨论的方便,以下不再采用对数的形式,而改用幂的形式)。例如,如果以 1.1 为底,就有

$1.1^0=1, 1.1^1=1.1, 1.1^2=1.21, 1.1^3=1.331, 1.1^4=1.4641$,…从而就有:

b(指数)	Δb	$N=1.1^b$(幂)	ΔN
0		1	0.1
1		1.1	0.11
2	=1	1.21	
3		1.331	0.121
4		1.464 1	0.133 1
		……	

显然,和以 10 为底的情况相比:

b	Δb	$N'=10^b$	$\Delta N'$
0		1	9
1		10	90
2		100	
3	=1	1 000	900
4		10 000	9 000
…		…	…

现在幂的改变(相对于指数的均匀改变而言)就比较均匀了。

如果我们再改而采取以 1.001 为底,容易发现:这时相对于指数的均匀变化而言幂的变化就已基本上是均匀的了。即:

b	Δb	$N''=1.001^b$	$\Delta N''$
0		0	0.001
1		1.001	0.001 001
2	$=1$	1.002 001	0.001 002 001
3		1.003 003 001	0.001 003 003 001
4		1.004 006 004 001	
…		…	…

但是，怎样才能改变指数的增长数与幂的增长数不对称的情况呢？就底数为1.001的情况来说，由于指数的增长数依次为1，而幂的增长数则近似地等于0.001，因此，可以想到，如果改用$(1.001)^{1\,000}$为底，所说的不对称性就可在很大程度上得到克服，因为这时有：$(1.001^{1\,000})^0=1.001^0=1$；$(1.001^{1\,000})^{0.001}=1.001^1=1.001$；$(1.001^{1\,000})^{0.002}=1.001^2=1.002\,001$；…从而就有：

B	Δb	$N'''=(1.001^{1\,000})^b$	$\Delta N'''$
0		1	
0.001		1.001	
0.002	$=0.001$	1.002 001	≈ 0.001
0.003		1.003 003 001	
0.004		1.004 006 004 001	
…		…	

进而，如果我们依次采取以下的数为底：

$1.1^{10}, 1.01^{100}, 1.001^{1\,000}, 1.000\,1^{10\,000}, \cdots,$

原来的不对称的情况就将不断得到改进，而如果以上述序列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限为底，则就可以达到完全的对称。事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$就是e。从而，对于对称美的追求就十分自然地导致了自然对数的引进（也正因如此，我们才把以e为底的对数称为“自然对数”）。

最后，应当指明的是，随着数学的发展，对称性的概念也得到了不断的扩展（对此，著名数学家外尔在其名著《对称性》中曾详细地予以论述）。在此我们仅限于指明这样一点，即可以将“匀称性”看成“对称性”这一概念的自然发展，因为前者无非是将考察的范围扩大到了对象的各个（未必是两个）组成部分。例如，在谈到人体美时，人们所考虑的往往不只是人体左右两侧的“对称美”，而且是身体各个部分的“匀称美”。

匀称性的考虑对于数学发展也有一定的促进作用。例如,线段的黄金分割很早就引起了人们的注意,而这主要地就是因为由此而构成的长方形给人以“匀称美”的感觉;然而,数学的发展已经证明,黄金分割以及相关的研究有着重要的数学意义。例如,黄金分割数$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right)$在优选法中就起到了一个关键的作用。另外,数学家们之所以十分重视定理的条件与结论之间逻辑关系的分析,并总是希望能找到相应的充分必要条件(这种研究的数学意义是十分明显的),事实上也就是对于“匀称美”的追求,因为,所谓“充分必要”,无非就是指“不多不少,恰到好处”。

简单性 与对称性相同,简单性也是数学美的一个基本内容。例如,在日常的数学活动中,经常可以听到这样的谈论:“这个证明很美。”而所说的“美”则就往往包括了简单性的含义。对此狄德罗也曾指出:“数学中所谓美的问题是指一个难于解决的问题,所谓美的解答则是指一个困难、复杂问题的简单回答。”一般地说,数学家们常常就以简单性作为自己追求的目标。如冯·诺依曼就曾指出:“人们要求一个数学定理或数学理论,不仅能用简单和优美的方法对大量的先天彼此毫无联系的个别情况加以描述,并进行分类,而且也期望它在‘建筑’结构上‘优美’。在陈述这个问题时平易轻松,然后在解决它和探讨它的所有尝试中遇到巨大困难,然后再出现某种非常惊人的转折,使探讨或一部分探讨一下子容易起来,等等。同样,如果推演是冗长或复杂的话,那么就应该包含某种简单的一般原理。用以‘说明’各种复杂和曲折的情况,把明显的武断化为少数几条简单的指导性的推动因素,等等。”

在一般的自然科学中可以看到同样的明显倾向。例如,罗森在评价爱因斯坦时就曾指出:“在构造一个理论时,他采取的方法与艺术家所用的方法具有某种共同性;他的目的在于求得简单性和美,而对他来说,美在本质上终究是简单性。”

另外,自然科学家们所说的简单性又常常是指理论能否借助于一个简单的数学公式得到表述。如海森堡就曾指出:“如果自然给我们显示了一个非常简单和美丽的数学形式——说到形式,我是指假说、公理等统一体系——显示了任何人都不曾遇到过的形式,那么我不得不相信它是‘真’的,它揭示了自然界的奥妙。……你必然也想:自然突然展现在我们面前,而我们中的任何人都对此毫无准备的各种关系的最令人震惊的简单和完备。”

对于简单美的追求也曾在一定程度上促进了数学的发展。例如,对数计算法的创立显然就是这方面的一个典型例子。事实上,不仅对数计算法是这样,就是乘法、幂等概念的产生也可看成追求简单性的直接产物。例如,正是为了避免重复的加法运算,人们才引进了乘法,如 $\underbrace{4+4+\cdots+4}_{7个4}=7\times 4$。

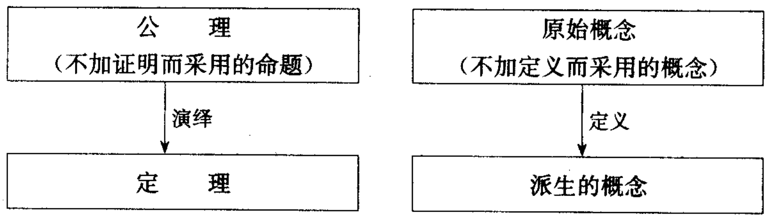
而幂的引进则是为了避免重复的乘法运算,如 $\underbrace{4\times 4\times\cdots\times 4}_{7个4}=4^7$。

另外,化归法之所以在数学研究中有着广泛的应用,主要原因就在于它能使解

决问题的过程得到较大的简化。

应当注意的是,数学中所说的简单性并不只是指(计算、证明)方法的简单性,而且也包括了逻辑方面的考虑,即要求数学理论在逻辑结构方面也应是简单的。例如,由于数学理论是逻辑地展开的,因此,出于简单性的考虑,数学家们就提出了公理的独立性问题,即认为如果一个公理能由其他公理推导而出,这一公理在逻辑上就是不必要的。另外,就每一条公理而言,数学家们则又认为它们应是简单的、自明的,而不应是复杂的、难以捉摸的。这样,(逻辑)简单性的考虑就直接促进了数学的发展。例如,正如第 1 章中所指出的,正是由于对于欧氏平行公理"非自明性"的不满以及由此而导致的关于平行公理独立性的研究,才最终促成了非欧几何的建立,而后者则正是数学现代发展的实际起点之一。

在现代关于公理系统的研究中,除去上述关于公理独立性与自明性的考虑以外,数学家们还对理论中所包含的概念结构进行了分析。不难看出,在严格的公理化开展中,在概念与命题之间存在着一定的对应关系:



从而,基于同样的考虑(这可以看成"对称性原则"的自觉运用),数学家们也提出了原始概念应是简单的(就单独的一个概念而言)和独立的(就各个原始概念的相互关系而言)的要求。

显然,按照上述标准建立的公理系统在逻辑上就是十分简单的了。例如,著名的皮亚诺算术公理系统就只用到了三个原始概念与五条公理(除去通用的逻辑概念及逻辑法则以外)。它们分别是:

原始概念:"自然数","1","后继(数)";

公理一:1 是一个自然数。

公理二:任何一个自然数的后继也是自然数。

公理三:没有两个自然数有相同的后继。

公理四:1 不是任何自然数的后继。

公理五:若一个由自然数组成的集合 S 含有 1,且当 S 含有任一自然数时,也一定含有它的后继,则 S 就含有全部自然数。

皮亚诺的这一工作正是现代数学基础研究的一个实际起点。

还应指出的是,对于简单美的追求事实上已渗透到了数学研究的各个方面。例如,人们提出,数学问题的表述也应是简单的。如希尔伯特就曾转引一位法国数学家的话:"要使一种数学理论变得这样清晰,以致你能向在大街上遇到的第一个人解

释它。在此以前，这一数学理论不能被认为是完善的。”希尔伯特又指出：“这里对数学理论所坚持的清晰性和易懂性，我想更应以之作为对一个堪称完善的数学问题的要求。”希尔伯特还曾对“简单性”与“严格性”的关系进行了分析。他说：“把证明的严格化与简单化绝对对立起来是错误的。相反，我们可以通过大量例子来证实：严格的方法同时也是比较简单、比较容易理解的方法。正是追求严格化的努力驱使我们去寻求比较简单的推理方法。”另外，在几何作图中，人们也坚持了只能用较简单的作图工具（即圆规与直尺）的要求。数学的历史发展已经证明，这种关于几何作图简单性的要求并没有限制数学的发展，恰恰相反，它极大地促进了数学的发展。犹如优秀的诗词能用最少的词语表现最深远的意境一样，数学的简单性、特别是逻辑简单性，常常与深远性相联系。正如希尔伯特所指出的：“数学中每一步真正的进展都与更有力的工具和更简单的方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论并把陈旧的、复杂的东西抛到一边。数学科学发展的这种特点是根深蒂固的。”

为了更清楚地说明这种由于简单性而导致的“真正的进展”，还可以二进位数制的建立为例来进行分析。

【例 4】 二进位数制渊源已久。例如，在我国古代就可以找到这种数制的早期萌芽。作为一种系统的研究，德国哲学家、数学家莱布尼茨最早认识到了建立这样一种数制的可能性；而他之所以产生这种想法，很可能就是由于（逻辑）简单性的考虑：在二进位数制中，我们只需使用 0 和 1 这样两个数字就可表示出所有各个数量。[⑥] 例如，在二进位数制中，普通十进位数制中的数 1，2，3，…，10，11，12，13 等就可分别表示为：

十进位数制	二进位数制
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
…	…
11	1 011
12	1 100
13	1 101

在莱布尼茨以后的很长时期内，二进位数制并未真正引起数学家们的重视（在

⑥ 莱布尼茨对此感到十分心满意足。他推断说：1 表示统一，很明显是上帝的标记，而 0 则表示无，在上帝的身边，处于万物的开端。因此，如果只用 0 和 1 就可以把所有的数字都表示出来，那无疑是说，上帝从虚无中创造了宇宙。

实际应用中，也没有哪一个会计愿意用 1 011 011 001 来代替 729)；但是，后来的发展却证明了这种记数法对于电子计算机是十分合适的，因为，在计算机中可以很方便地用一个特定按钮的“开”和“关”(相应于电路的“通”和“断”)来分别对应数字“1”和“0”；进而，又只须适当增加按钮(电路)的数量，我们就可用按钮的组合来表示任何一个二进制数。例如有十个按钮，数字 1 023 就可表示为：开开开开开开开开开开；而 729 则可表示为：开关开开关开开关关开；等等。这样，一个最初纯粹是由于美学上的考虑(逻辑简单性)而导致的结果最终就被证明具有重大的现实意义，即是一个“真正的进展”。

统一性 所谓统一性，是指部分与部分、部分与整体之间的和谐一致。显然，在这样的理解下，匀称性的概念就从属于统一性；另外，就统一性的概念在数学中的应用而言，则还经常包含有“不变性”的意义，也即是指在不同对象或同一对象的不同组成部分之间所存在的共同规律。

即使在初等数学中也可以找到很多体现数学统一性的例子。例如，在体积计算中就有所谓的“万能计算公式”，它能统一地被应用于棱(圆)柱、棱(圆)锥及棱(圆)台的体积计算：

$V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})$(其中 h 为相应几何体的高，S 和 S' 则分别为其上、下底面的面积)。

另外，在三角函数式的恒等变形中又有所谓的“万能置换公式”：

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2};\qquad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$\tan x=\frac{2u}{1-u^2};\cdots\qquad \left(\text{其中 } u=\tan\frac{x}{2}\right)。$$

正如第一章中所已指出的，利用这一公式我们就可将各种三角函数的有理式 $R(\sin x,\cos x)$ 统一地转化成 $\tan\frac{x}{2}$ 的有理式。

高等数学中更充满了显示数学统一性的例子。例如，在看到台劳公式时，我们就会深切地感受到数学的统一性：各种彼此完全不同的函数(只要它们在某一包含 x_0 在内的开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数)居然都能表示成如下的“统一形式”：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$(其中 c 是 x 和 x_0 之间的某个值)。

在数学的发展历史中，对于统一性的追求也曾极大地促进了数学的发展。例如，公理化方法事实上就体现了部分与整体间的和谐统一：在公理系统中，原先是零乱的、互不联系的各个命题被组织成了一个有机的整体。另外，由指数概念的推广

(正整数指数→零指数→负整数指数→分数指数→……)我们也可清楚地看出统一性的考虑在数学发展中的作用。

【例 5】 例如,正是为了保持指数运算法则的普遍有效性,我们才作出了如下的规定:

$a^0=1\ (a\neq0)$;$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq0,n$ 为正整数$)$,因为只有这样,才能保证以下法则的成立:

$\frac{a^3}{a^3}=a^{3-3}=a^0=1$;$\frac{a^3}{a^6}=a^{3-6}=a^{-3}=\frac{1}{a^3}$。

一般地说,这种保持运算法则普遍有效性(即统一性)的考虑在数系的不断扩充中曾发挥了十分重要的作用。例如,在很长的时期内,数学家们始终确信这样一种观点:不管数系怎样扩展,所得出的新数都仍将服从自然数的运算法则(如加法、乘法的结合律、交换律等)。如英国数学家格里哥里曾指出:"我用以考虑符号代数的见解是,它是处理运算的组合的科学,这些运算不是由它们的性质确定的,即不是由它们是什么或它们做什么来确定的,而是由它们所服从的组合的法则来确定的……这些法则在很多情况下已由数的许多已知运算法则提出来了。"由代数的有关知识可以知道,这种观点在数学的历史发展中曾起到过一定的积极作用。

【例 6】 我们还可以德国数学家 F. 克莱因的几何研究为例来说明统一性的追求对于数学发展的重要意义。

F. 克莱因的几何观以"爱尔朗根纲要"闻名于世,这是 F. 克莱因 1872 年在爱尔朗根大学的一次讲演中提出的。在这一讲演中,F. 克莱因明确地宣布说:"几何学尽管本质上是一个整体,可是,由于最近期间所取得的飞速发展,却被分割成为许多几乎互不相干的分科,其中每一个分科几乎都是独立地继续发展着,于是,公开发表旨在建立几何学的这样一种内在联系的各种考虑,就显得更加必要了。"具体地说,F. 克莱因提出了如下的关于几何的新观点:"各种几何(欧氏几何、仿射几何、射影几何等)都是由变换群所决定的,并且各种几何所研究的就是相应的变换群之下的不变量。例如,欧氏几何所研究的就是刚体变换群——平移、旋转、反射下的不变量;射影几何研究的是射影变换群下的不变量;等等。"这样,原先被分割开来的几何学在群的观念下就重新被统一起来了。F. 克莱因的这一工作在数学史上得到了很高的评价。如 M. 克莱因就曾评价道:"虽然 F. 克莱因的几何观点不能证明无所不包,但它确实能给大部分的几何提供一个系统的分类方法,并提示很多可供研究的问题。他的几何'定义'指引了几何思想约有 50 年之久。"

就统一性的追求而言,我们还应着重提及现代关于数学基础问题的研究以及法国布尔巴基学派的工作。

所谓数学基础研究,笼统地说,就是要为已有的数学理论奠定一个可靠的基础。数学基础的研究与追求统一性的努力是直接相联系的。例如,现代数学基础研究最

为重要的成果之一，就是证明了绝大部分已有的数学理论都可以集合理论为基础得到建立。这也就是说，大部分数学概念都可以借助集合论的概念得到定义，数学定理则可由集合论的公理出发得到证明。也正因如此，集合论的观点在现代数学的研究中就占据了特别重要的地位。正如亚历山大洛夫所说："集合论观点的统治也是现代数学的特点。"显然，这事实上也就十分清楚地表明了数学的统一性。⑦

另外，布尔巴基学派则是20世纪30年代在法国形成的一个数学学派（布尔巴基并无其人，而是这一学派的成员著书立说时所共同采用的一个笔名）。基于对于数学统一性的确信，布尔巴基学派在数学领域内进行了开拓性的研究。他们首先提出了（数学）结构的概念：这是指这样的对象集合，这些对象并没有预先指定的特征，我们所注意的仅是它们之间的关系，如运算关系等，并认为数学就是关于结构的科学，即其中所研究的就是抽象的结构，而不关心所涉及的对象究竟是什么。其次，布尔巴基学派又力图以结构的观点来揭示数学的统一性：通过对于各种数学理论的具体分析，他们指出，数学中的各种结构事实上组成了一个完整的"谱系"，其中，代数结构、拓扑结构与序结构是三种最基本的结构（他们称为"母结构"），其他的数学结构（他们称为"分支结构"）则是由这些基本结构经过多次的交叉、叠合所生成的。例如，实数域就是一个完备的阿基米德全序域，也即是由代数结构（域）、序结构（全序）、拓扑结构（完备性结构）交叉而成的。显然，按照这样的分析，整个数学就不再是各种互不相关的理论的简单混合，而是形成了一个有机的整体。

布尔巴基学派的工作对于数学的现代发展有很大的影响，从而也就更清楚地表明了追求统一性的意义。

一般地说，大部分数学家确信：数学的发展将日益证明数学的统一性。如希尔伯特就曾这样写道："今日的数学科学是何等丰富多彩，何等范围广阔！我们面临着这样的问题：数学会不会遭到像其他有些学科那样的厄运，被分割成许多孤立的分支，它们的代表人物很难相互理解，它们的关系变得更松懈了？我不相信会有这样的情况，也不希望有这样的情况。我认为，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力在于各个部分之间的联系。尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到：在作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时，在它的不同部分之间，也有大量相似之处。我们还注意到，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越加调和一致，并且，这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系。因此，随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来。"

另外，布尔巴基学派的重要成员之一让·迪多内也曾指出："人们经常给自己提

---

⑦ 20世纪60年代，西方一些国家兴起了名为"新数运动"的数学教育改革运动，而它的一个主要目标就是要将集合论的思想渗透到中学、甚至小学的数学教材中。由此我们也就可以看出集合的观点在现代数学教学中所占据的重要地位。

出这样的问题，数学的蓬勃发展会不会窒息它未来的进步：事实上不可能有包括数量如此之多、概念和成果如此之丰富的理论，因而导致了极端的专业化和理论之间更严重的隔离，最终由于缺乏有生命力的新思想而使它们衰败下去。我们确实知道，有理论枯竭这种例子，然而幸运的是，我们已多次重复过，在数学中存在着减少这种危险的强大而统一的趋势。"

综上所述，追求统一性就是一种具有重大数学意义的工作。

奇异性　数学美的另一基本内容是奇异性。例如，弗兰西斯·培根就曾说过："没有一个极美的东西不是在调和中有着某些奇异！"

一般地说，奇异性包含有新颖性的含义；另外，就这一概念在数学中的应用而言，则还常常包含有"出乎意料"的含义，这也就是说，那种被称为奇异的东西（如结论等），所引起的不只是赞叹，而且是惊愕和诧异，因为，它是如此地出乎常识或预料。

在数学的研究中，奇异性结果的获得往往会使数学家受到很大的震动。例如，古希腊的毕达哥拉斯学派就曾信奉这样一种学说，即是认为任何数量都可以表示成整数或整数的比，他们并因此而提出了如下的唯心主义宇宙观：宇宙的本质在于数的和谐性，即认为世上的一切事物和现象都可以、也只能借助于数的和谐性得到解释。而也正因为此，在这一学派的成员看来，关于$\sqrt{2}$的无理性（更为准确地说，即是正方形的对角线与其边长的不可公度性）的证明就是一个奇异的结果，他们并因此而受到了极大的震动。

（$\sqrt{2}$的无理性可以用反证法简单地证明如下：设$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（p,q互质），则有$2=\frac{p^2}{q^2}$，即$p^2=2\cdot q^2$，从而p必为偶数。设$p=2m$，代入上式可得：$(2m)^2=2q^2$，即$2m^2=q^2$，由此可知q也必为偶数。但这与p,q互质的假设矛盾。故$\sqrt{2}$不可能表示成整数的比，也即不可能是有理数。

一般地说，上述发现不仅使毕达哥拉斯学派陷入了困境，而且也对古希腊及其以后很长时期内的数学发展产生了很大影响。对此，著名数学史家M. 克莱因曾经指出："这种后果之一是它硬把数同几何截然分开，因为只有几何能处理不可公度比。它也把数学家赶到几何学家的队伍里去。"他又说道："如果希腊人能正视无理数，他们也许能使算术和代数推进一步；而且即使他们自己没有能这样做，他们也不至于阻碍后代在算术和代数方面取得进展，……希腊人之专注于几何迷惑了后世好几代人的视界。"

当然，就数学发展的全部历史而言，奇异性结果所造成的并不总是消极的影响；恰恰相反，它们之中往往也孕育着新的巨大发展的可能性。对此可以举一些典型的例子加以说明。

【例7】　在当时的大部分数学家看来，挪威数学家阿贝尔关于"五次及五次以上的方程不可能有一般形式的根式解"的结论无疑是一个令人难以置信的结果。因

为，尽管人们始终未能找到这样的求解公式，但大部分数学家仍然认为这种公式是存在的，而且，总有一天将为人们所发现；然而，阿贝尔却证明了这种公式是根本不存在的。但是，这一奇异的结论并没有使代数学的发展陷入绝境；恰恰相反，数学家们因此而开始了新的研究。例如，他们集中研究了代数方程何时存在有根式解的问题，而又正是通过这种研究，伽罗华创立了群论，从而使代数学的研究进入了一个新的时代，即是从局部性的研究转向系统结构的整体性分析。从而，这就像是关于火凤凰的那个传说：它并没有在烈火中化为灰烬，而是在火焰中获得了新生，变得更加光彩夺目，充满生机。

奇异性结果会对数学发展产生这样的影响事实上不足为奇，因为，奇异性结果的获得在一定程度上就意味着旧的观念（如“任何代数方程都必然存在根式解”的观念）的崩溃。因此，只要敢于面对现实，善于分析研究，人们的认识就可能因此而产生新的飞跃。

为了更清楚地说明问题，还可以以非欧几何为例来进行分析。

【例 8】 在具有传统观念的人们看来，非欧几何（例如罗氏几何）肯定也是一个奇异的理论，因为它与直观实在是太不符合了。也正因如此，尽管高斯在罗巴切夫斯基之前已经发展起了非欧几何的理论，但直至临终他都没有公开发表自己在这一方面的研究成果，因为他怕因此而引起“比俄喜人”（高斯在此借喻古希腊的愚笨部族来影射世俗的人）的叫喊。但是，正如前面所已指出的，非欧几何的建立是现代数学发展的实际起点之一，而这主要又是因为它打破了“欧氏几何是惟一可能的几何理论”这一传统观念，从而就为几何、乃至整个数学的发展开拓了新的可能性。

【例 9】 在同样的意义上，由英国数学家哈密尔顿创立的四元数代数也被誉为“代数的独立宣言”。如前所述，在很长的时期内，自然数的运算法则始终被认为是数的运算所必须遵循的准则，也即认为无论数系怎样扩展，新的数都仍然必须服从加法和乘法的交换律与结合律等这样一些法则。但是，我们能否创立一种不遵守这些法则（例如，乘法的交换律）的“新数”呢？由于这一想法实在是太大胆了，因此，哈密尔顿在最终建立四元数理论前就曾经历了长达十五年的“犹豫时期”。对此，他本人曾这样写道：“1843 年 10 月 16 日，当我和哈密尔顿小组步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候，它们就来到了人间，或者说出生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i,j,k 之间的基本方程；……我感觉到一个问题就在那一刻已经解决了，智力该缓口气了，它已经纠缠我至少十五年了。”哈密尔顿所迈出的关键性一步就是他清楚地认识到了自己必须、也可以抛弃乘法的交换律。

四元数的具体形式为 $$a+bi+cj+dk,$$

其中 a,b,c,d 为任意实数，i,j,k 则起着 i 在复数中所起的作用。关于四元数相等与加法的规定与复数的相应规定是类似的；乘法则可依据分配律及有关的规定（i^2

$=j^2=k^2=-1;i\cdot j=k,k\cdot i=j,j\cdot k=i;j\cdot i=-k,i\cdot k=-i,k\cdot j=-i$)进行。例如,设 $p=3+2i+6j+7k,q=4+6i+8j+9k$,就有:

$$p\cdot q=(3+2i+6j+7k)\cdot(4+6i+8j+9k)=-111+24i+72j+35k;$$

$$q\cdot p=(4+6i+8j+9k)\cdot(3+2i+6j+7k)=-111+28i+24j+75k。$$

由此可见,四元数的乘法不满足交换律。从而,"四元数代数的建立就是一个独立宣言,它把代数从自然数及其自然法则的束缚中永远地解放出来了。"这也就是说,四元数的建立为代数研究开拓了新的方向。

在数学的现代发展中还可找到很多由于奇异性结果的获得而导致的重要进展。例如,存在处处连续而不可微的函数,在黎曼意义下可积但却具有无穷多个间断点的函数,等等。对此,M. 克莱因分别评论道:"发现连续性并不蕴涵可微性,以及函数可以具有各种各样的反常性质,其历史意义是巨大的";"18 世纪 70 年代和 80 年代最受欢迎的活动之一,就是构造各种具有无穷多个间断点而在黎曼意义下仍为可积的函数。"从而,数学家们以奇异为美也就没什么可奇怪了。就如徐利治教授所指出的:"奇异是一种美,奇异到极度更是一种美。"

三、数学美的追求的方法论意义

对于数学美的追求为什么能对数学的发展起到一定的促进作用?为了回答这一问题,我们先对数学美的实质作一分析。

数学美的实质 如前所述,数学美的基本内容是对称性、简单性、统一性与奇异性。对于数学美的这几种基本形式的相互关系我们并可作出如下的进一步分析。

首先,在一定的意义上,对称性及简单性都可被归结为统一性。因为,第一,对称性无非就是部分与部分之间的统一性的特殊表现。第二,简单性的获得常常建立在对于统一性的认识之上;反之,统一性则又常常表现为以较为简单的形式揭示出对象的内在联系。也正因如此,简单性有时就被说成是统一性的一种客观标准。

其次,奇异性与统一性在一定意义上可以说是互相对立的。因为,奇异性就意味着出乎常识或预料,从而就是对于先前所达到的统一性的一种破坏;但是,又如前面所指出的,奇异性结果的获得往往标志着认识的飞跃,而这种新的认识则又意味着在更高的层次上达到了新的统一,因此,在奇异性与统一性之间也存在有互相依赖、相互促进的辩证关系,而数学则就是在它们的辩证运动中得到了不断的发展。这也就是说:"数学的发展就像精彩的故事一样,波澜起伏,扣人心弦,既在情理之中,又在意料之外,是和谐与奇异的统一体。"

依据前面的分析,我们就可指出数学美的实质了:由于物质世界是统一的,因此,作为客观世界数量规律的反映,数学理论在本质上也是统一的;又由于物质世界是一种多样性的统一,因此数学理论的统一也就是一种包含了差异的统一,即是和

谐与奇异的统一体。从而,在这样的意义上,对于统一性与奇异性(更为一般地说,就是数学美)的追求实质上就是对于数学理论的内在联系,即数学真理的追求。这就正如拉丁格言所说,“美是真理的光辉”。显然,这也就是美的追求为什么能促进数学发展的根本原因。

在此还可以从认识论的角度对所说的问题作一分析。如前所述,统一性(对称性、简单性)与奇异性在一定意义上是互相对立的;但它们又都可以统一于“彻底性”这样一个概念。因为,无论是对于和谐美或奇异美的追求,事实上都体现了数学家的这样一种特性:他们永不满足于已取得的成果,并总是希望能更深刻、更全面、更正确地去认识世界。因此,他们总是力图由已知去推出未知,希望能将复杂的东西予以简单化,分散、零乱的东西予以统一,也总渴望能开拓新的研究领域……也正是在这样的过程中,数学家们感受到了数学的美。从而,对于美的追求事实上也就是认识不断发展和深化的过程。

数学美的追求的方法论意义 由于真与美在本质上是一致的,而两者的具体表现形式则有所不同,因此,美学的考虑在数学的研究中就具有重要的方法论意义。

首先,美学的考虑有助于选择正确的研究方向。例如,法国著名数学家阿达玛就曾明确指出,“科学美感,这种特殊的美感,是我们必须信任的向导”,因为,“惟有美感能预示将来的研究成果是否会富有成果”。另外,著名数学家、非标准分析的创建者 A. 鲁滨孙也曾写道:“这是一个事实,就是组织起来的纯粹数学的世界在很大程度上是由我们关于数学美及纯粹数学重要性的含糊的直觉来调整的。”

例如,依据对称性的原则,在研究方向的选择上,我们就既应注意同向的研究(这时类比就是十分有用的工具),又应注意反向的考虑。以运算为例,如在掌握了加法运算的基础上,我们就既应进一步去从事乘法运算的研究(这是同向的研究),同时则又应当考虑其逆运算——减法运算的问题(这是反向的考虑)。类似地,在掌握了一元微分学的基础上,我们既应积极地去从事多元微分学的研究,同时则又应考虑其逆运算——积分运算的问题。一般地说,反向的考虑是比较困难的;但是,可以预料的是,这种考虑(也即对于对称美的追求)往往孕育着造成新的重大发展(例如,数系的扩展及新函数的引进等)的可能性。

再例如,在数学的研究中我们又应特别重视“反例”的构造,因为,正如前面的分析所已指明的,奇异性结果的获得往往会导致有关概念的澄清或新的研究方向的开拓。

其次,由于现代数学的高度抽象性,美学的考虑在理论的评论中也具有重要的作用。

例如,外尔在他的《空间—时间—物质》一书中曾发展起了引力规范理论。这一理论在当时看来似乎不那么真实,但外尔总觉得它是如此之美因而舍不得将它抛弃,因此这一理论就因为美而得到了保存。过了不久,当将规范不变性体系纳入量

子动力学时,果然弄清楚了外尔的直觉是正确的,因为上述理论被证明对于后者的研究具有十分重要的意义。

最后,作为问题的另一方面,我们又应指出,虽然美与真在本质上是一致的,但两者之间仍存在一定的差异,因此,我们就不能从纯粹美学的角度去研究数学,更不能以美学的考虑去完全取代真理性问题的分析,不然的话,就可能使数学研究走上歧途,甚至导致荒谬的结果。对于纯粹美学的研究的这种危险性,一些数学家也是再三强调了的。例如,冯·诺依曼就曾指出:"当一门数学学科远离它的经验本源继续发展的时候,或者更进一步,如果它是第二代和第三代,仅仅间接地受到来自现实的思想所启发,它就会遭到严重危险的困扰。它变得越来越纯粹地美学化,越来越纯粹地'为艺术而艺术'。如果在这个领域周围是互相联系并且仍然与实践经验有密切联系的学科,或者这个学科处于具有非常卓越和发展健全的审美能力的人们的影响之下,那这种美学需要不一定是坏事。但是,仍然存在一种严重的危险,即这门科学将沿着阻力最小的途径发展,使远离水源的小溪又分散成许多无足轻重的支流,使这个学科变成大量被搞混乱的琐碎枝节和错综复杂的末事。换句话说,在距离经验本源很远很远的地方,或者在多次'抽象的'近亲繁殖之后,一门数学学科就有退化的危险。""每当到了这种地步时,在我看来,惟一的药方就是为重获青春而返本求源:重新注入多少直接来自经验的思想。我相信,这是使题材保持清新与活力的必要条件,即使在将来,这也是同样正确的。"

综上所述,我们就既应注意美学的考虑,又不应忘记数学的真理性最终取决于实践的检验,数学发展的根本动力在于社会实践。

第二节　审美情感在数学发现中的作用

为了进一步说明培养数学美的鉴赏能力的重要性,我们再从发现心理学的角度对此作一分析,即通过数学直觉的剖析来揭示审美情感在数学发现(创造)中的重要作用。

一、数学直觉的特性

在第 2 章中,我们曾从逻辑的角度对数学发现的问题进行了讨论,即是通过实例的分析介绍了两种重要的发现方法:类比法和归纳法;但是,又如文中所已指出的,除去逻辑的成分以外,数学发现中还包含有直觉的因素,因此,也就有必要对数学直觉的确切意义、特性及其在数学发现中的作用等问题作出进一步的讨论。

直觉的非逻辑性　什么是数学直觉?按照大多数数学家的意见,这是指某种与逻辑相异的东西。例如,彭加勒就曾说过:"搞算术,就如搞几何,或搞任何别的科

学，需要某种与纯逻辑不同的东西。为了表述这个某种东西，我们没有更好的字眼，只能用‘直觉’一词。”这也就是说，直觉是“从事科学发现所需要的与纯逻辑不同的某种东西”。(但是，彭加勒立即又警觉到：“在这同一个字眼下隐藏着多少不同的意思啊！”)特殊地，数学直觉并就可以被说成一种直接反映数学对象结构关系的心智活动形式，是人脑对于数学对象事物(结构及其关系)的直接领悟或洞察，是一种不包含普通逻辑推理过程的直接悟性。

从而，在这样的意义上，非逻辑性也就可以被看成(数学)直觉的基本特性。具体地说：

第一，由于直觉是一种非逻辑的领悟或洞察，因此，与普通的逻辑推理相比，直觉的认识就具有直接(简洁)性。即如彭加勒所说，为直觉所指引的数学家不是以步步为营的方式前进的，“他们在第一次出击中就迅速达到了征服的目的”。应当指出的是，尽管直觉并非建立在严格的逻辑论证之上，但是，它却又往往伴有很强的“自信心”。这也就如波利亚所描述的那样：“一个突然产生的、展示了惊人的(处于戏剧性的重新排列之中)新因素的想法，具有一种令人难忘的重要气氛，并给人以强烈的信念。这种信念常表现为诸如‘现在我有啦！’‘我求出来了！’‘原来是这一招！’等惊叹。”

第二，与逻辑(推理)的抽象性相反，直觉常常与形象思维相联系，而且，这种形象思维的一个重要特点就是它的综合性，这就是说，此时呈现在人们头脑之中的是一幅整体性的图像，尽管它的某些细节可能是模糊的。

为了说明形象思维的这种“综合性”特点，可以举一个日常生活中的例子：我们常常可以立即辨认出远处的某一行人是自己所熟悉的某人，尽管你无法详细地说出作为其体态特征的各个细节，但却仍有一个确定的整体性印象，而且，几乎可以肯定的是，这是一种形象思维。

与这种日常的体验相比，要想说明数学中的形象思维无疑要困难得多。然而，幸运的是，阿达玛在其名著《数学领域中的发明心理学》中曾给出了这方面的一个具体例子。他在这一例子中所讨论的是一个十分基本的算术定理：“存在无穷多个质数”。阿达玛依次列举出了这一定理的经典证明中的各个步骤，同时又描述了这时在他的头脑中所呈现的心智图像(假设他所证明的是存在大于 11 的质数)：

证明步骤	心智图像
①列举出由 2 到 11 的所有质数，即 2,3,5,7,11。	我所看到的是一个混乱的组合。
②构成乘积 $2\times3\times5\times7\times11=N$。	N 是一个相当大的数，我把它想像成一个远离上述混乱组合的点。
③在乘积 N 上加 1。	我看到稍稍超出第一点的另一个点。
④如果这个数不是质数，就必有一个质因数，它就是所要求的数。	我所看到的是介于上述混乱组合与第一个点之间的某个地方。

阿达玛明确地强调了这种形象思维的综合性。他写道:“这种奇特(而又模糊)的图像对于上述证明的理解是十分重要的,因为借助于它,我就可以一下子看到论证中的所有成分,把它们相互联结起来,并使之成为一个整体——一句话,达到综合的目的。”一般地说,“每一个数学研究都迫使我建立这样的一个图式。它们总具有、也必须具有模糊性的特点,但又并非是不可靠的”。

由此可见,综合性(或者说,整体的确定性与细节上的模糊性)就是形象思维的一个重要特点,而事实上这也就是直觉的一个特点。

值得指出的是,彭加勒也曾从“序”的角度对直觉的综合性特点进行过分析。彭加勒指出,数学理解的本质就在于对“序”的把握。他写道:“一个数学证明并不是若干三段论的简单并列,而是众多三段论在确定的序之中的安置。这种使元素得以安置其中的序要比元素本身重要得多。一旦我感觉到,也可以说,直觉到这个序,以致我一眼之下就领悟了整个推理,我就再也不必害怕会忘掉任何一个元素,因为每个元素都将在序中各得其所,而这是不需要我付出任何记忆上的努力的。”从而,按照彭加勒的观点,直觉就是对于序的把握,而且,这种把握又具有综合性的特点。

直觉的“自发性”　从数学研究的实践看,直觉的认识又常常表现为无意识的思维活动。

为了说明这种无意识的思维活动,仍可举一个日常生活中的例子:当我们力图回忆起以前曾相识的某人的姓名时(这是有意识的,或者说自觉的思维活动),却怎么也想不起来;然而,当我们转而从事其他活动或工作时,这个人的姓名却忽然浮现在脑海中,连自己也无法说清楚相应的思维活动究竟是怎样实现的。

作为无意识思维活动的特性的分析,应当指出:

第一,思维活动的不连贯性是无意识思维活动的一个重要特性。例如,上面所说的那种姓名忽然在脑海中浮现的情况常常出现在注意力转移之后,从而相应的思维活动就表现出一种间断性。

正因为无意识的思维活动表现为思维活动的间断,直觉的认识就常常具有突然性,或者说,即是常常表现为“顿悟”(豁然开朗)。⑧ 有很多数学家都曾依据自己的亲身体验谈到过直觉的这种突然性。例如,在谈到自己是如何创立福克斯函数理论时,彭加勒就曾写道,他曾力图为一些原先以为不存在、后来却得到了构造的新函数确定一个统一的变换,但却很久未能成功;最后,在一次旅途中,当他一个脚踏在公共汽车的踏脚板上时,一个想法忽然出现在头脑中:他孜孜以求的不就是非欧几何中的变换吗?! 此时,虽然他仍然坐在车中与别人聊天,但已确有把握地感到:主要的问题已经解决了。

---

⑧　尽管我们肯定了直觉的认识常常表现为无意识的思维活动,并认为它经常以“顿悟”的形式出现;但却不应把直觉与顿悟完全等同起来,因为,数学直觉未必都是瞬间完成的,通常也需要一个酝酿的过程以及补充和反应的过程。从而,渐悟和顿悟就都应被看成直觉的一种表现形式。

第二，由于直觉的认识常常表现为无意识的思维活动，因此通常就是不可解释的。如苏联的凯德洛夫所说："直觉作为直接的推理形式，由于自身的特点，没有可能解释自己的活动，要知道，任何这种解释都要以某种间接方式表现出结论和推理之间的环节。因此，通常意义上的解释在这里是不可能的。"

很多数学家也曾依据自己的实践论述过直觉的"不可解释性"。例如，高斯曾以数年的时间徒劳地企图证明一个算术的定理，对此，他写道："最后，我获得了成功，但并非由于艰苦的努力，而是由于上帝的恩惠，就像一道忽然出现的闪光，疑团一下子被解开了，连我自己也无法说清在先前已经了解的东西与使人获得成功的东西之间是怎样联系起来的。"

最后，由于直觉往往表现为无意识的思维活动，因此，直觉的发生就具有偶然性，或者说，具有"不可预期性"。

为了清楚地说明直觉的这种"不可预期性"，我们不妨借用波利亚在《数学的发现》中所给出的一个例子。其中，作者力图用提示等方法使读者产生某种"突如其来"的想法；但是，如果您始终未能产生这种想法的话，那也不必感到懊丧，因为这样您就更好地理解了直觉的"不可预期性"。

【例 1】 已知，三个圆 k,l,m 具有相同的半径 r，且通过同一点 O；此外，l 和 m 相交于点 A，m 和 k 相交于点 B，k 和 l 相交于点 C（图 3－1）。求证：A,B,C 三点所确定的圆 e 的半径也是 r。

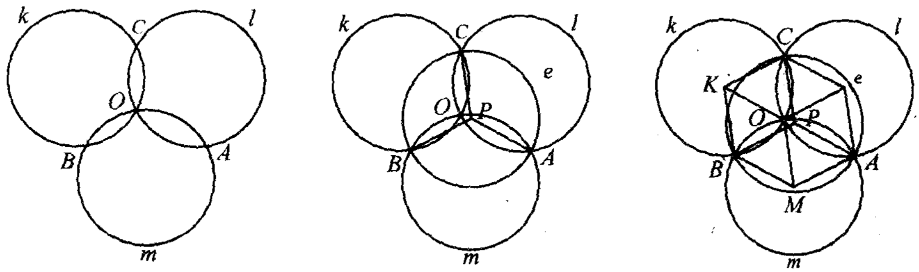


图 3－1　　图 3－2　　图 3－3

设圆 e 的圆心为 P，我们所要证明的即为：$PA=PB=PC=r$。（图 3－2）

为了探索可能的解题途径，不妨再把 k,l,m 这三个圆的圆心（设为 K,L,M）与它们和另外两个圆的交点（O,A,B,C 等）分别连结。这样我们就得到图 3－3。

你也许会注意到整个图形实质上是由其中的直线所确定的，因此我们就可把注意力集中到图 3－4 上。

波利亚提示说："这个图形是有吸引力的，它使我们想起一些熟悉的东西。（想起什么？）"

又，"它有点像老式杂志上的某些画面，这种画有不止一种的效果，如果你按通常的方式去看它，它是一个图像，可是如果你转到另一个位置再换一种特殊方式去

看它,那么另一个图像就会忽然闪现在你面前”。

波利亚问道:“你能从我们这张塞满了直线段和圆的图中看出有第二种含义的图像吗?”

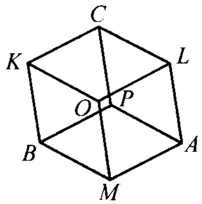


图 3-4

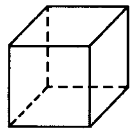


图 3-5

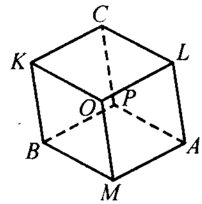


图 3-6

事实上,只需将图 3-4 与图 3-5 作一比较,我们就可清楚地理解波利亚的所指:图 3-5 是平行六面体十二条棱的一个投影图;因此,通过比较就可想到,我们也可将图 3-4 看成是一个“透明”的平行六面体的投影图(图 3-6)。这样,原来的问题就立即得到了解决。因为,依据立体几何的知识,如果一个平行六面体的投影方向选择得使看得见的九条棱的投影都等于 r(图 3-6 就是这样的情况),那么,由那个“看不见的”顶点(现指点 P)所引出的三条棱的投影也一定等于 r,即有 $PA=PB=PC=r$。

正如波利亚所指出的:“如果设想读者遇到了这样的事:从图 3-4 那些纠缠成一堆的线段和字母中,平行六面体的形象出乎他意料之外地‘跳’了出来,……可能他在某种程度上也将理解灵感这个字的意义,以及怎样去解释好像是一个内在的心声或者一个超自然的神在启示一样的一个深刻的想法突然出现。”然而,如果读者没有遇到这样的事,那也不必感到沮丧,因为,直觉“是任性的,固执的,它们可能出乎意料地闪现在我们面前,但经常是姗姗来迟,而有时干脆就让我们白等”。

如果把上面所说的直觉的突然性、不可解释性与不可预期性概括地说成直觉的自发性,那么,非逻辑性与自发性就是(数学)直觉的主要特性。

二、审美情感在数学发现中的作用

直觉的产生是不可预期的,但是直觉能力却是可以培养的。这方面的一个重要环节就是努力培养对于数学美的鉴赏能力。对此可以通过数学发现的实质以及直觉在数学发现中作用的分析来进行说明。

发明创造就是选择　在数学领域中,人们对于彭加勒关于数学发现(创造)的论述有很高的评价。例如,一本最新出版的科学家传记辞典这样写道:彭加勒“关于数学发现过程的众所周知的叙述至今仍然没有人比得上,而且总的来讲被许多数学家所证实”。

那么，什么是彭加勒关于数学发现(创造)本质的论述呢？这就是：创造就是选择。具体地说，彭加勒认为，数学创造的本质就是在已知的数学事实所可能构成的新组合之中作出正确的选择：由于从已有的概念、图像、变换、结构等等出发可以构造出不计其数的新组合，而其中的大多数都是无用的，而且，人们也不可能实际地去构造出每一个可能的组合，再逐一地去检查它们是否有价值，因此，数学发现的本质就在于作出正确的选择。

进而，彭加勒又对直觉在数学发现中的作用进行了具体分析。他指出，我们面前有无数条可供选择的道路，“逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不会遇到任何障碍，但是它不能告诉哪一条道路能引导我们到达目的地。为此，必须从远处瞭望目标，而教导我们瞭望的本领是直觉。没有直觉，数学家便会像这样一个作家：他只是按语法写诗，但是却毫无思想”。从而，按照彭加勒的观点，直觉在数学发现中的作用就可具体地归结为所说的“选择作用”。

审美情感与直觉　那么，直觉又是如何发挥所说的选择作用的呢？为了回答这一问题，彭加勒进而分析了审美情感与直觉的关系。

按照彭加勒的观点，直觉是一种无意识的思维活动；而又正是在这种无意识的思维活动中，审美情感发挥着选择作用。因此，总的来说，正如阿达玛在对彭加勒的有关论述进行概括时所指出的：“发明就是选择，而选择则又惟一地是由科学美感所支配的。”进而，也正是基于这样的认识，彭加勒最终又引出了这样的结论：“没有一个高度发展的美的直觉，就不可能成为伟大的数学发明家”。

应当指出，这里所说的审美情感与第一节中所说的美学的考虑是有所不同的：后者主要是指一种自觉的思维活动，而彭加勒所说的审美情感则主要是指无意识的思维活动。显然，相对于自觉的思维活动而言，无意识思维活动的研究要困难得多，因此彭加勒的论述就难免有主观、片面之处；然而，必须肯定的是，彭加勒的主要结论是正确的，即是应当明确肯定审美情感在数学发现中具有十分重要的作用。从而，这也就从另一角度更为清楚地说明了培养数学美的鉴赏能力的重要性。

第三节　努力培养数学直觉能力与数学美的鉴赏能力

现在，我们再对逻辑与直觉、自觉的思维活动与无意识的思维活动(理性与非理性)在数学研究活动中的相互关系作简要的分析。

一、逻辑与直觉

如前所述，在逻辑与直觉、自觉的思维活动与无意识的思维活动之间存在明显

的区别。但是，如果我们因此而把它们绝对地对立起来，或者更因此而否定逻辑与自觉的思维活动在数学发现中的作用，那就是完全错误的了。因为，在实际的数学研究活动中，逻辑与直觉、自觉的思维活动与无意识的思维活动事实上是互相依赖、相互促进的。例如，第一节的分析已经表明：数学的发现不仅依赖于无意识的思维活动，同样也依赖于自觉的思维活动（包括美学上的考虑）。另外，第 2 章的讨论也已清楚地表明了逻辑在数学发现中的作用。例如，即使就演绎逻辑而言，也不应被看成一种单纯的证明工具，因为，所谓的“试探性演绎法”事实上就是演绎法在数学发现中的应用。

一般地说，就逻辑与直觉在数学发现活动中的相互关系而言，我们认为：

第一，必须肯定直觉在数学发现中的作用。也就是说，在实际的数学研究中，除去逻辑方法的自觉应用以外，还必须注意应用直觉能力。

事实上，任何逻辑方法的应用都必须辅以直觉的判断。例如，在应用类比法去引出新的数学结论时，我们必然自觉或不自觉地用到了直觉判断。如在由 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 联想出 $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$ 时，其中 $3xyz$ 的系数 3 的确定显然就建立在直觉的判断之上。再例如，前面已指出，逻辑证明的核心即是使众多的三段论得以安置于其中的“序”，而这种序往往又是直觉地把握的。从而，总的来说，就如阿达玛所指出的，“几乎不存在纯粹逻辑的发现，某种源于无意识的直觉对于逻辑活动来说至少是一个必要的促进”。

第二，作为问题的另一方面，我们又应清楚地看到直觉对于逻辑的依赖性。对此仍可依据彭加勒关于（数学）发明创造的“四阶段说”作出说明。

具体地说，按照彭加勒的观点，数学发现（创造）的整个过程可以归结为如下的四个阶段：准备→酝酿→明朗（顿悟）→检验。

其中，准备与检验的阶段属于自觉的思维活动（两者的区别在于：准备属发现的范畴，检验则主要属于论证的范畴）；另外，酝酿及明朗的阶段则主要属于无意识的思维活动。

彭加勒认为，“有意识的思维活动是无意识思维活动的必要前提”。彭加勒曾以一个生动的比喻来说明这样一点：他把数学思想或概念比喻为“带钩的原子”，这些原子原来处于静止状态，只是通过自觉的思维活动，它们才开始活动起来，从而也才有可能通过互相组合形成新的观念原子。因此，彭加勒认为，数学发现就是从自觉的思维活动，即所谓的“准备阶段”开始的。另外，由于直觉在细节上的模糊性，更由于直觉的认识并非完全可靠，因此彭加勒认为，数学的研究活动不能停留于直觉的认识，还必须过渡到检验的阶段，因为只有通过自觉的思维活动，由直觉所产生的结论才能得到精确的表述，才能得到严格的检验和必要的改进或发展。

综上所述，把直觉与逻辑、无意识的思维活动与自觉的思维活动对立起来是错误的。正确的观点应是：直觉与逻辑犹如数学创造的双翼，它们相互补充、相互作

用，都是数学工作者进行创造的必要工具。

二、努力培养数学直觉能力

由于逻辑与直觉的对立，有些数学家提出了“直觉型”与“逻辑型”的数学家的区分。例如，彭加勒曾指出：“无论阅读伟大数学家的著作，还是阅读二、三流数学家的著作，你都不可能不注意到并鉴别出两种相对立的倾向，或者不如说，两种截然不同的心灵。其中之一完全被逻辑所支配，读他们的书，你就不由得相信，他们是以步步为营的方式前进的，没有给机会留下任何余地；而另一类则受直觉所指引，他们在第一次出击中就迅速达到了征服的目的，虽然这种征服有时是不稳定的。”彭加勒认为这种区别是天生的、绝对的。但是，由上面的分析我们已经知道，这种绝对化的观点是错误的。因此，主要的问题就在于如何培养数学直觉能力，并为这种直觉能力的充分发挥创造条件。考虑到我国的数学教育往往偏重于逻辑方法、特别是演绎推理能力的培养，这一问题显然也就更加具有现实性和紧迫性。

从方法论的角度看，笔者认为，以下几点是特别重要的：

应加强自觉的思维活动　正如彭加勒所说，只有通过自觉的思维活动，才能为无意识的思维活动提供必要的基础，因此在数学活动中，我们就不能像期待奇迹出现那样徒劳地等待直觉的产生，而应加强自觉的思维活动。这也正如阿达玛所指出的，“这种有意识的活动并不像人们所想的那样是无益的，正是这些活动开动了无意识的思维机器，不然的话，这一机器就永远不会运转，也不会产生任何结果”。

值得一提的是，现代创造发明学的观点认为应该积极开动大脑机器，从而掀起所谓的“大脑风暴”。这里所说的“大脑风暴”是指一种在脑海中迅猛地涌现出种种图像、联想、猜想、假设和非逻辑思维的心智活动形态。但是，人脑思维运动的脑风暴并不能随时产生，一般至少需要全神贯注地连续工作一二小时或两三小时才能逐步形成，而且根据“发明心理学”的研究，在脑风暴的初始阶段通常只能涌现出一些十分平凡的思想、观念及其组合，而这些显而易见的观念及其组合往往并不能帮助解决问题，因此要想获得创造或发现，就必须使脑风暴坚持进行下去，比如说，使脑风暴持续两个小时或一个半小时，则最后半小时就可能出现寥寥无几的或极为罕见的新思想或新观念。因此，从这样的观点看，我们也就必须加强自觉的思维活动。

总之，没有艰苦的思想劳动，就不可能有任何发明创造。

注意思想集中与适当分散的辩证关系　在数学的研究中，适当地集中思想于某一明确目标是十分必要的，因为有效的大脑思维必须联系着一个明确的目标——比如需要解决某个数学问题，或是希望取得某种数学发现等——这时所联系的目标或目的将成为思维运动的联系中心，于是脑海中涌现出来的联想、猜想、假设和一切非逻辑思维也就会围绕该中心展开，从而有利于解决问题，达到目标。

但是,作为问题的另一方面,我们又应注意,过分地使思想集中于某一点(例如,某一可能的解答,或某一可能的解题方向),对数学研究也是有害的,因为这会使思想受到束缚。如阿达玛就认为:“无论就数学或经验科学而言,没有充分地‘开放思想’是失败最常见的原因。”

因此,我们就应十分注意集中思想与适当分散的辩证关系。特殊地,从方法论的角度看,这更可以被看成一个有益的教诲:如果在一个问题上连续工作了很长时间但却没有看到任何取得进展的可能性,那就应当把这个问题放下,并尝试去干别的事情。但是,我们只是暂时地离开,以便在一段时间后重新回到这一问题上来。

应学会形象思维　由于直觉常常与形象思维联系在一起,因此,学会形象思维对于培养直觉能力就十分有益。例如,我们可以用某种图式来表示解题的过程:如果用点表示问题中的已知及未知成分,用线段表示它们的联系,那么,整个解题过程就可表示为由已知点出发到未知点的由线段组成的某种几何图形。

【例 1】　图 3-6 中阴影部分的面积计算过程可表示成图 3-7 中的点线图。

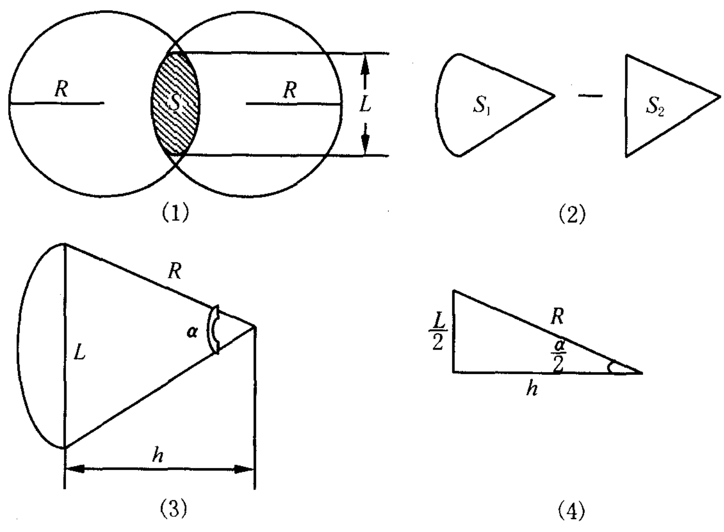


图 3-6



(1) $S=?$　　(2) $S=2(S_1-S_2)$



(3) $a=?$ $h=?$

(4) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{L}{2}\div R, h=\sqrt{R^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}$

图 3-7

显然，这种图形能使我们直观地看出解题过程以及其中所包含的基本思想的联系，从而也就有益于形象思维与直觉能力的培养。

注意培养对于数学美的鉴赏能力　最后，依据前面的分析可知，提高直觉能力的关键在于培养对于数学美的鉴赏能力。对此，我们还可依据大脑的机制作出进一步的分析。

现代的科学研究表明，人的大脑的两个半球具有不同的功能：左半脑主要担负分析任务，如逻辑推理、数学计算、写作等；右半脑则与空间概念、识别、构思、音乐、

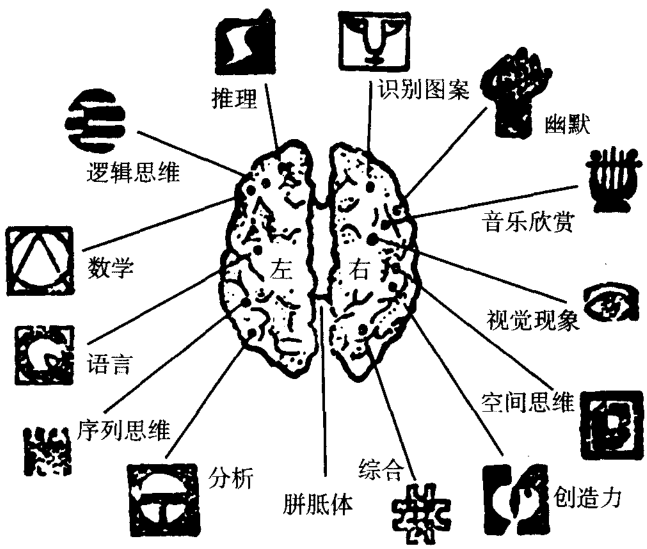


图 3-8

颜色的辨认以及直观思维和创造能力有关(图 3-8)。因此，如果我们过分地强调逻辑思维的训练，而由于这些行动都是由左半脑指挥的，右半脑的功能就不能得到充分发挥，从而也就不利于创造能力的培养。与此相反，如果我们有意识地加强美的鉴赏能力的培养，右半脑的功能就得到了发挥，从而也就有利于创造能力的培养。另外，又由于左、右半脑在生理机制上是互相联系的，因此右半脑的发展也就有利于

左半脑的发展，即有利于抽象思维与分析能力的培养。

还应指出的是，数学美的鉴赏能力的培养对于提高学习数学与从事数学研究的积极性也有很大的帮助作用。因为，一个没有数学鉴赏力的人既不能理解数学内在的美，也不能理解生活环境中处处存在着数学的旋律，不能理解从物质微粒的每一震颤到巨大天体的庄严运行都服从数学的规律，从而也就不可能发自内心地热爱数学。

总之，我们既应加强逻辑思维的训练，努力提高抽象思维的能力，又应注意培养数学直觉能力，培养对于数学美的鉴赏能力。

第4章 对象的抽象性与方法的抽象性

在第1章中，我们曾从解决问题的方法这一角度对数学家与一般自然科学家（如物理学家）的区别进行过分析。除此以外，在数学家中还盛行着这样一种说法，即认为数学家在气质上接近于诗人，而物理学家等则属于“博学者”之列。后一说法的依据是什么？为了说明这一点，最好的方法就是从数学的本质特性——抽象性去进行分析。

苏联著名数学家 A. Д. 亚历山大洛夫曾对数学的特性作过这样的分析：“甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地察觉到数学的这些特征：第一是抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是其应用的极端广泛性。”数学的这几个特性显然不是互不相关的，而也正是在这样的意义上，我们才把抽象性说成是数学的本质特性。

例如，谁曾见到过1？我们只能见到（某）一个人、一棵树、一间房屋，而决不会见到作为数学研究对象的真正的“1”（注意，这里不应把概念“1”与其符号相混淆）。类似地，我们也只能见到圆形的月亮、圆形的轮子，而决不会见到作为几何研究对象的真正的“圆”（我们也必须对“圆”的概念与纸上所画的圆明确地加以区分）。一般地说，上述分析对于任一数学研究对象都是有效的，即它们都是概念，都是抽象思维的产物。从而，这就在一定程度上说明了数学的抽象性。

但是，我们不仅可以对数学、而且也可对一般的理论科学作出同样的结论。因为，任何理论思维都必须借助一定的概念，而概念的形成则就是抽象思维的结果，即其中必定包含对于真实事物的“简单化”与“粗糙化”。正如列宁所说：“如果不把连续的东西割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么我们就不能想像、表达、测量、描述运动。思维对运动的描述总是粗糙化、僵化，不仅思维是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。”由此可见，抽象性事实上就是任何一门（理论）科学乃至全部人类思维所具有的共同特性。因此，为了说明数学的本质特性，我们还必须对数学的抽象性作出进一步的分析。下面就分别从研究对象与论证方法这两个角度对数学的抽象性作出论述。

第一节　研究对象的抽象性

如前所述，任何理论科学的研究对象都是抽象的概念；那么，与一般的概念相比，数学概念有哪些独特的地方呢？对此，可以分别从抽象的内容及抽象的程度这两个方面进行分析。

一、特殊的抽象形式

数学抽象的特殊内容　有些数学哲学家曾从抽象的不同层次或不同范畴这些角度，对数学概念与自然科学诸如物理学的概念的区别进行分析。这些论述有一定的道理。但是，如果不从量与质的辩证关系这一角度去分析，我们就不可能真正揭示数学抽象的本质。也就是说，在数学的抽象中，我们仅仅保留了对象的量的特征，而完全舍弃了它们的质的内容。

具体地说，与其他任何自然科学一样，数学中很多重要的概念都渊源于实践，或者说，可以在真实世界中找到其现实原型。但是，在数学概念的形成过程中，我们着眼的只是对象的量的特性，如数量、空间形式、……而完全舍弃了它们的质的内容。例如，在由“一个人”“一头羊”等客观事物抽象出相应的数学概念“1”时，我们所注意的只是这些对象在数量上的(共同)特性，即量的多少，而根本不去考虑所说的对象究竟是什么(不管是人、是羊，还是别的什么东西)。与此类似的，在由各种圆形的事物抽象出相应的几何概念“圆”时，我们所注意的也仅仅是这些对象的(空间)形式，而完全不顾及它们的特殊的质的内容(无论是木头、铁或是由别的什么东西所制成的)。显然，在这样的意义上，数学的抽象就完全不同于其他自然科学中的抽象。因为，在其他的自然科学中，首先注意的就是事物的质的内容，例如，现在所研究的是什么物质(水、二氧化碳……)，它们又是由什么元素(氧、氢……)所组成的，等等。另外，尽管在自然科学的研究中我们也注意到了量的问题，如原子的个数以及它们在分子中的排列形式等，但这种量的研究完全是为了相应的质的研究(例如，相应物质的化学性质的分析)服务的。从而，总的来说，数学抽象的重要特点之一就在于它的内容。即如恩格斯所说：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关紧要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线，分别用 a,b 和 x,y 来表示常数和变数……”

量的概念的正确理解　对于所说的量的概念，我们应作正确的理解。就其历史

演变而言，"数"和"形"曾是"量"这一概念的基本内容。在这样的意义上，也就有数学是"关于数量关系与空间形式的科学"这一说法。但是，随着社会实践与数学自身的发展，量的概念也不断得到了丰富和发展，因此我们就不能把数学的研究对象局限于"数"和"形"。例如，正如第三章中所指出的，按照 F. 克莱因的观点，几何的研究对象就是各种变换群下的不变量。另外，按照法国布尔巴基学派的观点，数学的研究对象则是结构。总之，我们必须广义地去理解量的概念，而不能采取静止的、僵化的观点(对此可参见第二节的分析)。

数学应用的广泛性 由于数学研究的对象是"纯粹"的量，因此，数学的应用就不限于任何一种特定的事物，而是有着最为广泛的可能性。

亚历山大洛夫曾从以下几个方面对数学应用的广泛性进行说明：

"第一，我们经常地几乎每时每刻地在生产中、在日常生活中、在社会生活中运用着最普通的数学概念和结论，甚至并不意识到这一点。"

"第二，如果没有数学，全部现代技术都是不可能的。"

"最后，几乎所有的科学部门都多多少少很实质地利用着数学。"

更为一般地说，由于任何事物和现象都必然地包含有质和量两个方面，质的问题又必然表现为一定的量，因此从原则上讲，数学的应用就是没有限制的。

二、特殊的抽象高度

与一般的自然科学相比，数学抽象的又一特点在于它所达到的高度：数学的抽象程度远远超过了自然科学中的一般抽象。对此，可以通过"理想元素"在数学中的广泛应用加以说明。

如前所述，数学中很多重要的概念都渊源于实践，或者说，可以在真实世界中找到其现实原型。但是，就每一个具体的数学概念而言，它们的形成过程又是极不相同的。有些概念建立在对于真实事物的直接抽象上。例如，1，2，3，4 等最简单的数量概念显然就是这种直接抽象的产物。另一些概念则建立在较为间接的抽象之上，也即建立在已有概念的抽象分析之上。最后，在某些情况下，数学概念与真实世界的距离还可能是如此之遥远，以致可以被看成"思维的自由创造和想像物"，这就是数学中所谓的"理想元素"(想像元素)。

事实上，即使在初等数学中我们也可以找到所谓的"理想元素"。例如，当我们将自然数的序列"无限制地"继续下去：1，2，3，…，101，102，……相应的数的概念与真实世界之间的距离也就变得越来越遥远。因为，那些很大的数显然不可能建立在对于真实事物的直接抽象之上，而主要是理性思维的产物，即包含了一定的"想像"成分。(应当指出，正是这种想像使数学家们接触到了客观世界最为深刻的一些奥秘。例如，数论中那些至今尚未得到证明的猜想，如哥德巴赫猜想等，就是这样的例

子。)类似地,直线的“无限性”(可以向两侧无限地延伸)也是理性思维的结果,因为,在我们周围的事物中,是找不到那种可以真正地被看成是“无限的直线”的东西的。(如果这一“发明”可以归功于某一个人的话,那么这位发明家就可自豪地说:“我根据能摸、能扔、能摘的许多具体的物体完成了这样一个自觉的思维过程。我的后代将因为我想像出了无限的直线而感谢我,因为借助于这样的直线去认识世界,将比没有它要方便得多。”)

为了更清楚地说明“理想元素”的性质及其在数学研究中的作用,我们再以虚数 i 及直线上的无穷远点为例来进行分析。

【例 1】 从数学的发展历史看,虚数在最初是由于解方程的需要而引进的。1545 年,代数学家卡当在求解方程 $x\cdot(10-x)=40$ 时,指出了分别为$(5+\sqrt{-15})$与$(5-\sqrt{-15})$(即 $5\pm\sqrt{15}\mathrm{i}$)的两个根。他说,只要把$(5+\sqrt{-15})$与$(5-\sqrt{-15})$相乘就会得出 40,把它们相加则会得出 10,因此,从纯数学的角度看,$(5\pm\sqrt{-15})$就确实是上述方程的根。但是,能否把这类对象看成真正的“数”,即合理的数学对象呢?对此人们在很长时期内是有怀疑的。正因如此,它们才获得了“虚数”(即“想像的数”)这样一个名称。例如,欧拉就曾说过:“因为所有可以想像的数都或者比 0 大,或者比 0 小,或者等于 0,所以很清楚,负数的平方根不能包括在可能的数中,从而我们必须说它们是不可能的数。然而这种情况使我们得到这样一种数的概念,它们就其本性说来是不可能的数,因而通常叫做虚数或者想像中的数,因为它们只存在于想像之中。”

然而,这种“想像的数”后来却被证明对于数学研究具有重要的意义。例如,只有承认虚数(更为一般地说,就是复数)的合理性,才能证明“代数基本定理”(这是高斯于 1799 年证明的,即任一实[复]系数的 n 次代数方程至少有一个实根或复根)。另外,研究范围由实数域到复数域的扩展对于函数论的研究也是十分重要的。例如,在没有作出这样的扩展以前,人们感到下列级数的收敛半径为 1 的事实是无从理解的:

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots\left(=\frac{1}{1+x^2}\right),$$

因为,无论令 $x=1$ 或 $x=-1$,相应的和函数都具有确定的意义。但是,如果在复平面上去进行分析的话,上述结论就十分自然了:这时如令 $x=\mathrm{i}$,就有

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}^2}=\frac{1}{1+(-1)}=\frac{1}{0},$$

因此和函数$\frac{1}{1+x^2}$在复平面上的点(0,1)处就无意义,从而,相应级数的收敛半径也就不可能超过 1。(如图 4-1,这与级数 $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x}$的收敛

半径为 1 的情况十分相似：和函数$\frac{1}{1+x}$在 $x=-1$ 处无意义。）更为一般地说，数学家们甚至因此而得出了这样的结论："联结实数域中两个真理的最短途径是通过复数域。"由此我们也就可以清楚地看出复数即"理想元素 i"在数学研究中的重要作用。此外，公式 $e^{i\pi}+1=0$ 则更突出地表明了 i 这一理想元素与通常的数之间的联系。

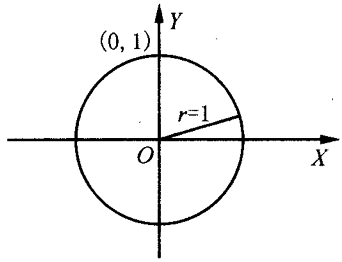
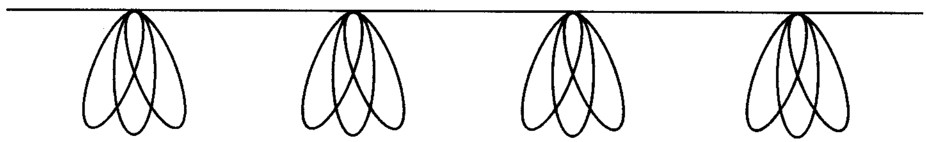


图 4－1

【例 2】 除去虚数 i 外，直线上的无穷远点也被数学家们看成"理想元素"的又一典型代表。由第 3 章我们已经知道，无穷远点的引进主要源于对称性的考虑，而与真实世界则只有间接的联系。的确，如果没有诗人一般的伟大想像，怎么能把直线看成一种封闭图形，并把直线上的无穷远点看成无穷多条与已知直线相平行的直线的交点呢？又怎么能想像这样一条仅由无穷远点所构成的无穷远直线的存在呢？

为了体会这种想像所达到的高度，我们不妨具体地设想一下在上述假设下平面上各条直线的分布情况。对此，匈牙利著名数学家路莎·彼得在她的名著《无穷的玩艺》中曾有这样的描述："直线是向两侧无限延伸的，由于我们在每条直线上只加了一个无穷远点（不然的话，就会破坏点与直线间的对偶关系），直线的两端将在无穷远处相遇，即将变成某种形式的圆。这样，尽管直线是向两个相反的方向延伸的；然而，仿佛由于某种神奇的魔力的作用，它们变成了圆，而且所有这些直线都将悬挂在无穷远直线的各个点上——互相平行的直线悬挂在同一点，就像果树上的一串串果实一样（图 4－2）。


图 4－2

路莎·彼得接着写道："（但是）我们是不应把无穷远直线画得如此平直的。事实上，谁也不知道究竟应当怎样去画。因为，它的一个点同时代表着正东与正西，另一点同时代表着正南与正北，等等。还是让我们完全放弃这件事吧！因为它确实不属于可以理解的世界。"显然，所说的"不可理解性"事实上也就十分清楚地表明了无穷远点（直线）的"理想（想像）性"。

尽管无穷远点只是一种理想元素，但是，由第 3 章我们已经知道，无穷远点（直线）的引进具有重要的数学意义。例如，其直接结果之一就是保证了"对偶原理"在射影几何中的有效性。另外，我们还可举出以下的例子：任何学过圆锥曲线的人迟早都会想到这样的问题：给定一个（二元）二次方程，怎样才能确定它所对应的圆锥

曲线的类别(椭圆、双曲线或抛物线)? 利用无穷远直线可以容易地解决这一问题。首先,只需对坐标系稍作变化,就可写出无穷远直线的方程(可以发现,这一方程与普通直线的方程确实是同一类型的)。进而,我们又可具体地去考察这一方程与所给定的二元二次方程有无公共解:如果它们无公共解,所给定的方程其所代表的就是椭圆(圆);如果有一个公共解,则就是抛物线;而如果有两个公共解,这一方程所代表的就必定是双曲线。

一般地说,随着数学的发展,理想元素在数学中占据了越来越重要的位置。例如,数学史家 M. 克莱因就曾指出:"1700 年以后,越来越多的、更远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌现出的概念,进入了数学",它们逐渐取代了那些"直接观念化"的概念,并在数学中占据了主导的地位。显然,这也就十分清楚地表明了数学抽象所达到的特殊高度,对此的确只能用诗人的丰富想像才能加以比拟。也正如列宁所说,"幻想是极其可贵的品质","有人认为,只有诗人才需要幻想,这是没有理由的,这是愚蠢的偏见! 甚至数学上也需要幻想的……"

三、数学抽象的基本方法

我们通过实例来介绍数学中常用的一些抽象方法。

等置抽象　所谓等置抽象,是指由一些(具体或抽象的)对象抽象出其中所存在的共同特性。例如,由大量的个别事物抽象出"1"这一数量概念,由大量"成对的事物"抽象出"2"的概念,等等。

作为一种严格的数学定义方法,等置抽象的应用必须满足以下条件:

在所讨论的一类对象("个体")中,可以建立这样的二元关系,使它满足对称性、传递性和反身性。

如果用 $x,y,z,\cdots$表示所讨论的对象,R 表示所说的关系:

$Rxy \leftrightarrow xy$ 具有 R 关系,

那么,R 满足对称性、传递性和反身性的条件可以分别表述成:

对称性:对所有的 x、y,均有 $Rxy \rightarrow Ryx$;

传递性:对所有的 x、y、z,均有:Rxy 且 $Ryz \rightarrow Rxz$;

反身性:对所有的 x,均有 Rxx。

在所说的条件下,关系 R 显然将原来的所有对象分割成了若干个"等价集合":属于同一个集合的任何两个个体都具有 R 关系,属于不同集合的个体之间则不具有 R 关系。这样,我们就可把这些等价集合看成是新的元素,而它们所代表的显然就是集合中所有个体的共同性质。

例如,在现代的数学基础研究中,逻辑主义者就曾采用这样的方式来严格地定义自然数的概念:

1 是所有单元组的集合；

2 是所有双元组的集合；

3 是所有三元组的集合；

……

其中，单元组是指这样的集合，它有且仅有一个元素，双元组则是指仅有两个元素的集合……

如果采用数理逻辑的符号，上述定义可以分别表示为

$\overline{\overline{c}}=1$（$c$ 是单元组）$\leftrightarrow(\exists x)(x\in c\wedge(\forall y)(y\in c\leftrightarrow y=x))$，

$\overline{\overline{c}}=2\leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(x\neq y\wedge x\in c\wedge y\in c)\wedge(\forall z)(z\in c\leftrightarrow z=x\vee y=z))$，…。

又 $1=\{c\mid\overline{c}=1\}$，

$2=\{c\mid\overline{\overline{c}}=2\}$，…

以下再以“同余数”为例，进一步说明等置抽象的用法。

【例 3】 在确定除数（在同余数理论中，称为“模数”）的情况下（不失一般性，可假设模数为 3），同余的关系显然满足对称性、传递性和反身性，因此就可以此为依据，利用等置抽象去引进新的数学概念。即：

$[0]=\{x\mid x$ 是自然数且其被 3 除所得的余数为 $0\}$；

$[1]=\{x\mid x$ 是自然数且其被 3 除所得的余数为 $1\}$；

$[2]=\{x\mid x$ 是自然数且其被 3 除所得的余数为 $2\}$。

对同余数也可引进相应的运算。例如，它们的加法及乘法可以分别定义如下：

加法	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

乘法	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

这样，我们就得到了一种新的代数系统。颇具特色的是，这是一个有限的代数系统：它只有三个元素。

理想化抽象 所谓“理想化抽象”，在此是指这样一种由实际的事物或现象引出抽象概念的方法，其中包括对于真实事物或现象的简化与完善化，从而所得出的数学概念与其现实原型就未必完全符合。

几何概念的引进可以看成理想化抽象的典型例子。例如，任何真实事物的形状都很难说是严格的圆（球）形；另外，在现实世界中当然也无法找到“无大小的点”“无宽度的线”……因此，相应的几何概念就都是“简化”“完善化”的结果。

理想化的抽象方法不仅对于数学概念的引进是十分重要的，而且对于由实际问

题去构造相应的数学模型也是必不可少的，因为，只有这样，我们才能有效地应用数学理论去解决各种实际问题。为了清楚地说明这样一点，可以以“七桥问题”为例来进行分析。

【例 4】 七桥问题在拓扑学的历史发展中具有重要的地位。这一问题是这样产生的：德国哥尼斯堡有一条布勒尔河，这条河有两个支流，在城中心汇合成大河，中间是岛区。河上有七座桥，如图4－3所示：

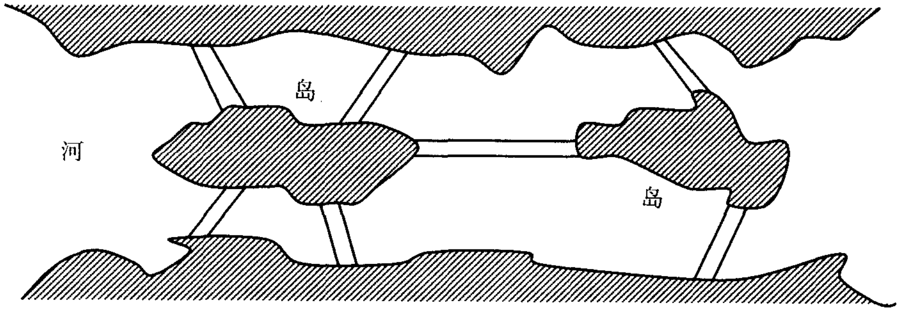


图 4－3

作为一种游戏，哥尼斯堡的大学生们提出了这样的问题：能否以任何一点为起点，相继地走过七座桥，而且每座桥只走一次，然后又重新回到起点。大学生们进行了多次实地尝试但却始终未能成功。于是就写信给当时著名的数学家欧拉，请他协助解决这一问题。这就是著名的“七桥问题”。

欧拉成功地解决了这一问题，而解题的关键就在于适当的抽象。具体地说，欧拉正确地认识到了整个问题与所走路程的长度完全无关，而且，岛（半岛）与河岸则又无非就是桥梁的连接点，因此，我们就可把所说的这四个地点设想成四个点，并把七座桥设想成七条线。这样，原来问题就变形为：能否一笔且无重复地画出图 4－4 所示的图形。

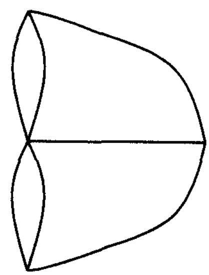


图 4－4

依据上述的抽象分析，欧拉顺利地解决了“七桥问题”：首先，按照每一点处交会的曲线的数目的奇偶性，可以把图形中各个交会点区分为“奇点”和“偶点”；由于所考虑的是“一笔画”问题，因此，必然的结论是：只有起点与终点才可能是“奇点”，因为，对任何一个中间点来说，每次我们沿着一条曲线到达这一点，紧接着就必须沿着另一条曲线（这样才能满足“无重复”的条件）离开这个点，这样，在这些点处交会的曲线的数目就必然是偶数。其次，由于现在所要求作的是封闭图形（终点与起点必须重合），因此，可以一笔且无重复地画出某一图形的必要条件就是图中各个交会点都是“偶点”（可以证明这一条件也是充分的）。但是，由实际计算可以看出，图 4－4 中的各个交会点都是“奇点”，因此这一图形就是不可能一笔且无重复地画成的。

由于“七桥问题”与图线的长度等度量问题完全无关，因此它就是一个典型的拓扑问题（一般地说，拓扑学所研究的是图形在压缩或延伸变换下保持不变的性质，即与度量无关的性质）。而由上面的介绍可以看出，由实际问题引出拓扑问题的过程就包括了理想化与简单化。

一般地说，运用理想化方法解决实际问题的关键在于抽象的“适当性”，即我们既不能将原来的实际问题过分地简单化（从而造成过大的误差），也不能使经过抽象所得出的数学问题过于复杂（以致不能顺利地获得解决）。作为一般的总结，徐利治教授在《数学方法论选讲》中有如下的论述：第一步，对所研究的实际问题即现实原型，要分析其对象与关系结构（包括变量因果关系）的本质属性，以确定其数学模型的类别（确定型、随机型、模糊型等）；第二步，要确定所研究的系统并抓住主要矛盾，……因为数学模型所反映的应该是主要因素间的关系的结构；第三步，要进行数学抽象。例如，假设所考虑的是地球的运动，相应的研究范围就应是日地系统，因为，相对于太阳与地球的相互作用而言，其他诸星体对地球的引力作用是微不足道的（从而，前者就是主要矛盾）。作为进一步的抽象，还可以把太阳和地球都看成几何上的点，并把太阳的位置看成固定不变的（定点）。这样，问题就可获得较大的简化，而所得出的数学模型则又不至于完全脱离实际。

应当指明的是，解应用题可以被看成培养理想化抽象能力的一个有效途径。因为，就如波利亚所指出的，“在列方程解文字题时，学生要把一个实际问题翻译成数学语言；这就使他们有机会体验到数学的概念和具体的东西是可以联系起来的，……能第一次尝试到数学在他（将来）的工作里主要是怎么用的，也第一次有这样的机会去锻炼自己，培养自己这方面的习惯”。

弱抽象与强抽象　“弱抽象”与“强抽象”的概念对于自觉掌握由已知概念去引出新概念的方法是十分重要的。

所谓弱抽象，是指由原型（或已有概念）中选取某一特征（侧面）加以抽象，从而获得比原结构更广的结构，也即使原结构成为后者的特例。

例如，由全等形的概念出发，借助弱抽象就可获得相似形及等积形的概念：它们分别保存了“形状相似”与“面积相等”的特性。

另外，所谓强抽象则是指通过引入新特征强化原结构来完成抽象，从而，所获得的新结构就是原结构的特例。

例如，初等几何中各种特殊的四边形概念的引进事实上就是应用了一连串的强抽象，如图4－5。

除了新概念的引进以外，我们也还可以利用“弱抽象”与“强抽象”这样两个概念对各种数学理论中有关概念的相互关系作出具体分析，而这对于弄清概念的“层次结构”、从而深入地理解相关的理论（及搞好教学）是十分有益的。例如，由上述关于四边形的概念结构的分析可以看出，平行四边形的概念在其中占有特别重要的位

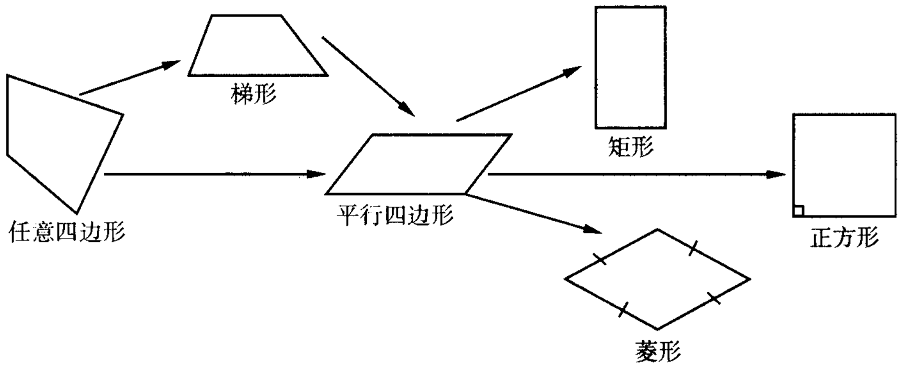


图 4－5

置:它既是若干个抽象的结果,又是另外一些(新的)概念抽象的出发点(从图形上看,它既是若干分支的“交会点”,又是若干新的分支的“分叉点”)。因此,我们就应牢固掌握平行四边形的概念及其有关的性质。

存在性抽象 作为思维能动性的一种重要表现形式,有时可以假设一个原先认为不存在的“对象”的存在性,也即引进所谓的“理想元素”,并由此而发展起一定的数学理论。例如,虚数 i 及无穷远点的引进就是这样的例子。

由于理想元素的引进常常源于美学的考虑,更由于关于理想元素存在性的假设常常与原来的认识(理论)相抵触,因此,在应用存在性抽象去引进新的数学对象时,一个特别重要的问题就是如何去证明由此所得出的新的数学理论的合理性——从理论上说,也就是如何去证明新的数学理论是相容的(无矛盾的)。

正如第一章中关于非欧几何合理性问题讨论所表明的,数学家们常常采用间接的方法来证明自己所采用的存在性假设的合理性。如在欧氏几何中构造出非欧几何的模型,从而用欧氏几何的合理性来保证非欧几何的合理性。作为又一个例子,我们还可以看复数在数学中的地位是如何得到确立的。

【例 5】 如前所述,虚数(更为一般地说,就是复数)在最初是作为理想元素得到引进的。然而,在进一步的发展中,这种“想像的数”却被证实对于数学研究具有重要的意义。但是,在复数理论的合理性得到证明以前,即使到了 19 世纪,仍有不少数学家对复数的应用持保留态度。例如,英国剑桥大学的教授们就曾在很长时期内始终“对讨厌的 $\sqrt{-1}$ 抱不可动摇的厌恶心理,采用笨办法杜绝它的出现,并用之于一切可能的地方”。从数学的发展历史看,这种情况只是在复数理论得到了几何解释以后才有了根本的改变。

具体地说,有不少数学家(如欧拉)早就认识到了可以把复数看成平面上的点,挪威数学家韦塞尔等更为系统地从事了这一研究。现今,即使是中学生对于复数的几何表示法也已经是十分熟悉的了。例如,由于在平面上的点与复数之间可以建立

如下的一一对应：点$(a,b)\leftrightarrow$复数 $a+b\mathrm{i}$，又由于平面上的点与二维向量是一一对应的，因此，我们就可借助向量来给出复数运算的几何解释。

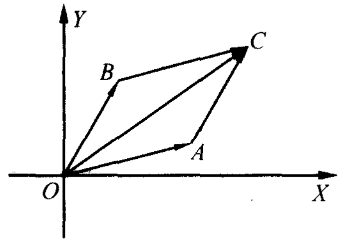
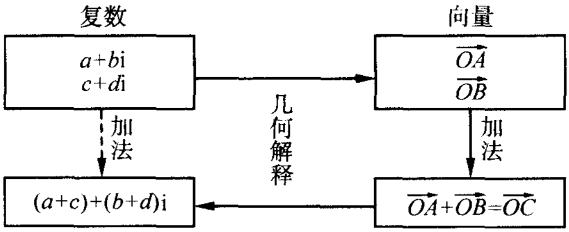
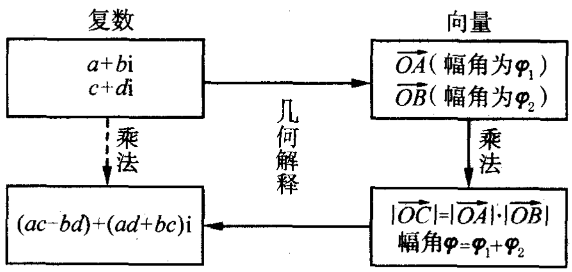


图 4－6

具体地说，复数的加法就相当于向量的加法（如图 4－6）。即：



另外，复数的乘法则相当于这样一种向量运算：新的向量的长度（模）等于原来两个向量的长度的乘积，它与 x 轴正方向所成的夹角（幅角）则等于原来两个向量的幅角的和。即：



这样，“复数的直观意义就完全建立起来了”，它在数学中的地位也因此得到了确立。

最后，应当强调的是，相对于实践检验而言，关于数学理论合理性的证明（例如，关于相容性的相对性证明）只具有间接的意义。当然，我们并不能因此而否定这种证明的意义；毋宁说，就如恩格斯所指出的，“数学上各种数量的明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们合理的相互关系”。（对于实践与理论思维的辩证关系，在第三节中还将作出进一步的分析。）

第二节　数学方法的抽象性

本节所说的数学方法主要是指公理化方法。自欧几里得的时代开始，公理化方法就已成为对数学理论进行严格表述的最有效方法：我们用公理刻画出理论中所涉及的原始概念的最基本性质；然后，再用逻辑推理逐步地演绎出其他的命题（定理），

从而将所有的结论(公理、定理)组织成一个有机的整体。由于严格的数学理论都必须采取公理系统的形式,又由于在这样的系统中大部分数学命题(定理)的真理性并非直接建立在观察与实验之上,而是建立在公理的真理性(以及逻辑法则的有效性)之上,因此,就如亚历山大洛夫所说:“不仅数学的概念是抽象的、思辨的,而且数学的方法也是抽象的、思辨的。”

与应用的广泛性一样,数学方法的抽象性在很大程度上也是由研究对象的抽象性所决定的。由于数学所研究的是“纯粹”的量,任何观察或实验的对象则都必然具有特定的质的内容,因此,我们就不能满足于对数学命题进行实际的检验,而还必须从理论上去对此加以论证(例如,我们可以对成千上万个三角形的内角去进行度量,但这并不能代替关于“三角形内角和等于 180°”这一欧氏几何定理的证明);另外,又由于任何逻辑证明都必须以一定的前提为依据,因此,公理化方法的产生及其在数学研究中的广泛应用就是必然的。

从数学的发展历史看,公理化方法曾经历了由实质的公理化方法经由形式的公理化方法到现代的元数学研究的发展。这种发展是与数学的整体发展相适应的,而且也集中地反映了数学抽象程度的不断提高。下面就从这样的角度对公理化方法的历史发展作出介绍与分析。

一、由实质的公理化方法到形式的公理化方法

实质的公理化方法 实质的公理化方法的典型代表是欧几里得的《几何原本》。在这一著作中,欧几里得把先前是零乱的、互不相关的几何命题组织成了一个有机的整体。欧几里得的《几何原本》是如此的成功,以致一直到了 18 世纪末,各种教科书中对于(初等)几何题材的处理基本上都仍然是因袭欧几里得的;而且,《几何原本》的发行量据称仅次于《圣经》而居世界第二。

《几何原本》对很多自然科学家的成长也曾产生过十分重大的影响。例如,爱因斯坦就曾说过,在他的幼年有两件事是难以忘怀的。第一件事是他在五岁时得到一个磁罗盘的礼品;第二件是七年后他得到一本欧几里得几何学的启蒙教科书。他写道:“书中都是些确定的论断,譬如三角形的三条高交于一点这个论断(虽然一点也不显然)还是可以得到非常精确的证明而不会使人产生怀疑。这种明彻和确定性给我留下了不可泯灭的印象。”另外,罗素在他的自传里也曾写道:“我在 11 岁的时候,开始学习欧几里得几何,并请我的哥哥教我。这是我一生中的一件大事,它使我像初恋一样入了迷,我当时没有想到世界上还会有这样有趣的东西。”

具体地说,欧几里得所采用的方法是这样的:

他首先指明了几何学的研究对象,即点、线、面等。并且,他给这些对象下了这样的“定义”:点是“没有部分的那种东西”,(曲)线是“没有宽度的长度”,面是“只有

宽度和长度的那种东西”,等等。(应当指明,按照现代的观点,欧几里得的上述定义并不是十分恰当的,因为,他是用了一些比“点”、“线”、“面”等更难以把握的概念,如“部分”、“宽度”、“长度”等,来对它们加以“定义”。从而,欧几里得在此所给出的事实上就只能说是一种直观的解释,尽管这种解释对于概念的理解是有用的,但在逻辑上却是不妥当的。)

其次,欧几里得引进了关于这些对象的一些明显事实作为不加证明而直接采用的公设。他所采用的公设共有五条:

公设一,从任一点到另一点作直线(是可能的);

公设二,把有限直线不断循直线延长(是可能的);

公设三,以任一点为中心和任一距离(为半径)作一圆(是可能的);

公设四,所有直角彼此相等;

公设五(平行公设),若一直线与两直线相交,且若同侧所交两内角之和小于两直角,则两直线适当延长后必相交于该侧的一点。

再次,欧几里得又引进了五条更为一般的断言作为公理(按照欧几里得的用法,公理与公设的区别在于:前者与几何的研究对象并无特殊的联系。但后人对公理与公设一般不再加以区分,并统一称为“公理”):

公理一,与同一个东西相等的一些东西,彼此之间也是相等的;

公理二,等量加等量,总量仍相等;

公理三,等量减等量,余量仍相等;

公理四,彼此重合的东西是相等的;

公理五,整体大于部分。

最后,从公理(设)出发,欧几里得借助于逻辑演绎逐步得出了各种几何命题,即所谓的定理。这种定理在《几何原本》中共有 467 条之多。

由于欧几里得的(几何)公理系统具有特定的对象(或者说,这一公理系统被认为是从属于这些特定对象的),又由于这些对象具有明显的直观背景——现实空间(从而人们就可用所谓的直观性作为判断公理真理性的依据),因此,这种公理系统就被称为“实质的公理系统”。简单地说,实质公理系统就是“对象—公理—演绎”系统。

形式的公理化方法的形成 实质的公理化方法与当时的数学发展水平(更为一般地说,与当时的认识水平)是相适应的。具体地说,在很长的时间内,数学的研究只限于算术(代数)与几何这样两个分支,由于算术与几何的研究对象都具有明显的直观背景,因此数学就被认为是对于某些特定对象的研究。例如,欧氏几何就被认为是关于空间的绝对真理,从而也就是惟一可能的几何理论;类似地,通常的算术理论则被认为是关于数量关系的绝对真理,也即是惟一可能的算术理论。这样,公理化方法的研究也就长期停留于实质的公理化方法的水平。

由于数学的发展，上述那种认为数学是对于某些特定对象的研究的传统观念逐渐被打破了，这也就直接促成了由实质的公理化方法到形式的公理化方法的发展。造成这种变化的主要原因有：

第一，由于非欧几何在数学中地位的确立，欧氏几何不再被认为是惟一可能的几何理论，而各种几何理论同时存在的局面则就意味着几何理论不再从属于某种特定的对象。例如，正是从这样的观念出发，人们逐渐认识到了“自由地”建立各种几何理论的可能性。譬如，既然我们可以用罗氏平行公理（“过直线外一点，可以作不止一条直线与已知直线相平行”）代替原来的欧氏平行公理，那也就可以提出另一种新的“平行公理”：“过直线外一点，根本不存在与已知直线相平行的直线”。事实上，这就是黎曼几何中的平行公理。因此，在一定的意义上，黎曼几何就可看成“思维自由想像”的产物。⑨

第二，正如第3章中所已指出的，哈密尔顿的四元数代数的建立标志着代数从“自然数及其自然法则的束缚下永远解放出来”，从而，人们似乎也就可以任意地去建立各种可能的代数系统（有限的与无限的；满足乘法交换律与不满足乘法交换律的……）。这样，代数的研究也就不再从属于某种特定的对象。

第三，除去上述的由“单一性”向“多样性”的发展外，现代数学也表现出了新的统一性。就形式的公理化方法的形成而言，以下的认识是特别重要的：尽管若干个数学理论可能具有不同的研究对象，但它们的逻辑结构却可能完全相同。例如，按照通常的定义方式，具有形式$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$的特殊类型的矩阵的加法及乘法运算可进行如下：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}。$$

因此，如果完全局限于这类矩阵的讨论的话，所得出的代数结构与复数域的结构就是相同的（只需令$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\leftrightarrow a+bi$就可清楚地看出）。更为一般地说，则就正如著名数学家布劳维尔所指出的：19世纪的数学发展“反复表明了多么复杂的理论都可以从一个数学领域传递到另一个数学领域……”；从而，人们也就逐渐形成了这样的观点：对于数学研究来说，重要的并不在于所研究的对象是什么，而是在于对象间的相互关系（逻辑结构）。这也就如布劳维尔所指出的，“这些发现看来的确表明

⑨ 为了避免矛盾，这时还需要对其他一些欧氏公理作出适当的修改，因为，从这些公理可以推出“至少存在有一条平行线”的结论。

了，对于数学理论来说，只有逻辑形式才是最重要的。”这样，由实质的公理化方法向形式的公理化方法的发展就不可避免了。

形式的公理化方法 正是在上述的特定历史背景下，公理化方法经历了由实质的公理化方法到形式的公理化方法的发展。后一方法在希尔伯特的《几何基础》(1899年出版)中得到了典型的表现。

具体地说，以下关于几何研究的新观点即可被认为构成了希尔伯特的几何研究的一个基本立场：欧几里得关于点、线、面的定义在数学上其实并不重要，它们之所以成为讨论的中心完全是由于它们与所选择的公理之间的关系；因此，不论所讨论的对象是什么(是点、线、面，还是别的什么东西)，只要它们满足公理所表述的事实，那么，由这些公理出发经由演绎所得出的定理对它们来说也都是成立的，这也就是说，通常所谓的(欧氏)几何理论就可看成关于这种对象的一个理论。(正是在这样的意义上，希尔伯特说：“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面。”)显然，在这样的理解下，几何理论与原先的特定对象之间的联系就被切断了。

按照上述的精神，希尔伯特对传统的几何题材进行了新的处理：

“设想有三组不同的对象，第一组对象叫做点(而不是：“是点”——注)……”，希尔伯特这样来引进几何学的研究对象。然后，希尔伯特指出，这些对象的性质在于它们的相互关系——对此可以用“在……之上”“在……之间”“合同于”“平行于”“连续”这样一些概念来刻画，这些概念的严格含义则由如下的五组公理来确定：

第一组(1—8)，连结公理。如Ⅰ$_8$：给定两点A，B，总有一直线a存在，使A，B在其上。

第二组(1—4)，次序公理。如Ⅱ$_1$：如果点B介于A，C之间，那么A，B，C是同一直线上的三个不同点，而且B也介于C，A之间。

第三组(1—5)，合同公理。如Ⅲ$_2$：如果两线段都合同于第三线段，那么第一线段也合同于第二线段。

第四组(欧几里得)平行公理。Ⅳ：在一平面上通过已知直线外一点，只可以引一条直线，使它与已知直线相平行。

第五组(1—2)，连续公理。如Ⅴ$_1$(阿基米德公理)：如果AB和CD是任意两条线段，那么在直线AB上存在若干个点A_1，A_2，…，A_n，使线段AA_1，A_1A_2，A_2A_3，…，$A_{n-1}A_n$都合同于CD，并使B介于A和A_n之间。

最后，从这些公理出发，希尔伯特借助逻辑演绎来展开几何理论。

显然，在这样的处理下，原来的几何理论所包含的特定意义，即对象的直观背景就完全被舍弃了，因为我们现在所从事的已不再是某种特定对象的研究，而只是由给定的前提(公理)出发去进行演绎。(由于直观意义的丧失，所说的公理也失去了原来的意义，即不再具有“自明性”或“必然性”，而只能说是一种用以作为演绎基础的“假设”；另外，也正因为现在不再是由对象决定公理，而事实上是由公理决定对

象，因此所说的公理又常常被称为关于对象的“隐定义”。）总之，现在的公理系统已不再是原来的实质的公理系统，也即不再是所说的“对象—公理—演绎”系统了，而是成了一种“假设—演绎”系统。这也就是所谓的“形式的公理系统”。

由于形式的公理系统所反映的已不只是某种特定的研究对象的性质，而是许多具有相同数学结构的对象的共同性质，因此，和实质的公理化方法相比，形式的公理化方法就具有更为重要的数学意义；另外，公理化方法的这一发展显然也标志着数学的抽象达到了新的、更高的水平。

二、元数学的研究与现代的数学观

元数学的研究　由于数学发展的需要，希尔伯特自 20 世纪 20 年代起集中从事了数学基础的研究，并逐步发展起了一门新的数学理论：元数学。

所谓元数学，笼统地说，就是指把数学理论（如自然数理论、几何理论等）作为一个整体加以研究。例如，关于公理系统相容性的研究就属于元数学的范围，因为这时我们所关注的已不是个别命题的证明，而是整个理论的逻辑结构，即其是否包含两个直接相矛盾的结论。从历史的角度看，希尔伯特的《几何基础》事实上即已包括了元数学的研究。例如，在这一著作中，希尔伯特在实数的算术理论中为欧氏几何构造了一个模型，从而证明了几何理论相对于实数理论的相容性；另外，希尔伯特还利用构造模型的方法证明了《几何基础》中所采用的五组公理是彼此独立的，而这种关于公理独立性的研究也属于元数学的范围。然而，只是在数学基础的研究中，希尔伯特才更系统、更明确地发展起了元数学的理论（他并因此被称为“元数学之父”）。希尔伯特所提出的元数学理论主要包括：

第一，在元数学的研究中，应当明确区分两种不同的理论：对象理论和元理论。其中，对象理论是元数学的研究对象；元理论则是我们在对对象理论进行研究时（例如，证明其相容性）所采用的数学理论。

第二，为了对已有的数学理论实行元数学的研究，应当把它们组织成所谓的“形式系统”。应当注意的是，这里所说的形式系统不同于前面所说的“形式的公理系统”：在形式系统中我们必须明确地说明所使用的逻辑规则，也即必须用机械的变形（演算）去代替建立在意义分析之上的逻辑推理；另外，在形式系统中又必须实行彻底的符号化，也即应当从相应的理论中完全抽去它所包含的真实意义，这就是说，在形式系统中我们所从事的只是按照机械的法则去对无意义的符号（串）实行纯形式的变形（和组合）。

严格地说，形式系统是由以下两个部分组成的：

（1）组成部分：①明确地列举出理论中所使用的“原始符号”（包括数学和逻辑的符号）；②明确地说明哪些符号序列组成“合式公式”（这相当于有意义的命题）。

(2) 推理部分。①明确地列出所有不加证明而采用的合式公式，即公理；②明确地列出所有的变形规则(相当于推理规则)，借助于这些规则，可以从一些合式公式得出另一些合式公式，即得出所谓的"可证命题"。

另外，形式系统中对于有关特性的描述必须是有效的。这就是说，对于形式系统的描述必须达到这样的要求：按照给定的、机械的方法，可以在有限步骤内判定：①一个符号是否为系统内的原始符号；②一个符号序列是否构成系统内的合式公式；③一个合式公式是否为公理；④从一组合式公式能否变形出另一组合式公式。

按照希尔伯特的观点，这种把数学理论组织成形式系统的要求是完全必要的，因为，只有这样，理论的逻辑结构才能得到充分暴露，从而也才有可能对此实行元数学的研究。

第三，作为数学基础研究的具体规划，希尔伯特提出，我们应当用有限的方法去证明由已有的数学理论(首先就是自然数理论)抽象而出的形式系统的相容性。由于希尔伯特认为有限的方法是绝对可靠的，因此，希尔伯特确信，一旦上述规划(这一规划后来被称为"希尔伯特规划")得到了实现，数学的可靠性问题也就一劳永逸地得到了解决(参见第5章)。

从数学的历史发展来看，元数学思想的提出具有十分重大的意义：它标志着数学的研究达到了新的、更高的水平。对于这一发展可以这样来形容：如果说过去人们只是在各种数学理论的内部从事数学的研究，那么，现在就已开始超出这些理论，或者说是站在理论之上去考察数学理论的整体性结构了。因此，尽管希尔伯特规则的基本目标，即是用有限的方法证明形式算术系统的相容性，并没有能够实现，但元数学的思想与相关的研究仍然产生了很多重要的成果。例如，著名的哥德尔不完备性定理就是这种研究最为重要的成果之一。另外，从公理化方法的发展这一角度看，我们则又可以说，元数学的研究标志着公理化方法发展到了一个新的阶段。

哥德尔不完备性定理可以表述如下：

任何以形式算术系统为子系统的形式系统，如果是相容的，就一定是不完备的。这也就是说，不可能建立这样的形式系统，它是相容的，而且，所有与算术真命题相对应的合式公式也都能够在这一系统中得到证明(从而是完备的)。

从上述定理出发，哥德尔还引出了如下的推论：

对于任一有限公理化的形式系统来说，都不可能存在这样的相容性证明，它可以在系统内得到表述。

由于有限性方法可以在算术系统内得到表述，因此用有限性方法证明形式算术系统的相容性就是不可能的。从而，这也就清楚地表明了希尔伯特规则的基本目标是不可能实现的。

现代的数学观 公理化方法的现代发展直接导致了数学观的演变。首先，由于元数学思想的提出，在数学研究中人们的着眼点就从个别命题的演绎扩展到了整个

理论逻辑结构分析。其次，由于数学理论的形式化在一定意义上就意味着内容与形式的分离，因此也就给数学思想带来了极大的"自由性"：人们似乎可以任意地去建立各种"假设—演绎"系统。这样，数学的研究对象就大大地扩展了。

总之，按照现代的观点，数学的研究对象已不是某些具体的、特定的对象，而是抽象的数学结构⑩。即如迪多内所说："从1840年左右开始，经过长期演化之后，至1920年左右，纯粹数学开始主要关注于研究结构而不是关注被赋予这些结构的对象，这已差不多是老生常谈了。"进而，现代数学所研究的也不只是已经得出的数学结构，而且还包括了各种可能的数学结构。从而，这也就如亚历山大洛夫所指出的，"现代数学的决定性特点可以这样来看，即它的对象不仅是已给出的，而且也是可能的量的关系和形式。……因此，简要地说，如果初等数学是常量数学，继其后的一个时期的数学是变量的数学，那么，现代数学就是各种量之间的可能的，一般说是各种变化着的量的关系和相互联系的数学"。显然，数学观的这一演变也就更为清楚地表明了现代数学研究所达到的高度抽象性。

第三节　数学发展的一般规律

上面我们已从研究对象与论证方法这样两个角度对数学的抽象性进行了分析。与第3章中关于美学的考虑在数学发展中作用的分析一样，这里的论述也可被看成对于理论思维在数学发展中作用的直接肯定。为了更清楚地说明理论思维的作用，以下再从一般角度对理论思维与实践的辩证关系作一简单分析。

一、实践对于数学发展的决定性作用

社会实践决定了数学发展的基本方向　如前所述，迪多内是法国布尔巴基学派的主要成员之一，该学派十分强调对于数学结构的抽象分析；然而，迪多内却用十分明确的语言来反对毫无根据的抽象。他写道："可能对我们有潜伏危险的仅仅是本身那种只是希望胜过前辈的毫无根据的抽象。"更为一般地说，尽管数学可能由于纯粹的理论思维（美学的考虑、概念的抽象分析……）得到一定的发展，但是，又只有那些在自然科学和技术中找到了应用，或者在具有这种应用的那些理论的重要概括中起了作用的数学理论，才可能得到持续的发展，并能牢固地被列入到科学之中。例如，尽管微积分理论（无穷小分析）的萌芽可以追溯到古希腊，但只是到了16世纪以

⑩　从而，如果我们在今天仍然坚持"数学的研究对象是量"这一说法的话，就必须对"量"的概念作出广义的理解，特别是，"数"和"形"已不能被看成"量"的基本意义，毋宁说，"结构"是一个更为恰当的解释。

后，由于科学技术发展的迫切需要(特别是运动的研究的需要)，微积分理论才得到了迅速的发展，并最终导致了由初等数学时期向变量数学时期的过渡。

总的来说，社会实践就决定了数学发展的基本方向。

社会实践是检验数学理论真理性的最终依据 就数学真理性问题的研究而言，首先应当明确的是，我们的着眼点不应是个别的命题，而是整体性的理论。例如，正如非欧几何的发展所已表明的，我们不应孤立地去考虑"究竟是欧氏平行公理为真，还是罗氏平行公理为真"这样一个问题，而应就整个几何理论(欧氏几何、非欧几何)的真理性来进行分析。

正是基于上述的思考，我们容易看出，逻辑的证明不能代替实践的检验，因为，前者所证明的只是命题(定理)相对于前提(公理)，或者说相对于整个理论的真理性(对此我们不妨称为"内部真理性")；与此相对照，整体性理论的真理性(可以称为"外部真理性")则仍然依赖于实践的检验。

其次，就整体性的数学理论而言，实践的检验作用主要表现于理论的可应用性。具体地说，如果一个数学理论在客观实际的某个方面找到了实践性的应用，这就证明这种理论是对于客观世界(某个侧面)的正确反映，也即具有一定的真理性；反之，如果它不适用于客观实际的某个方面，这就证明这种理论具有一定的局限性，而如果一个理论始终未能在客观实际中找到任何实践性的应用，那么这种理论就不能看作对于客观实在的正确反映，也即不能认为它具有任何的真理性。

二、数学概念的辩证性质

为了更清楚地说明理论思维与实践的辩证关系，还可从数学研究对象的辩证性质这一角度作出分析。

如前所述，在此我们必须首先肯定数学研究对象的抽象性。如恩格斯所说："全部所谓纯数学都是研究抽象的，它的一切数量严格说来都是想像的数量。"其次，我们则又应当清楚地看到数学研究对象的客观意义：由于数学思维建立在对于真实世界直接或间接的认识之上，因此，在这样的意义上，我们也就应当说，数学概念并不是毫无客观内容的"纯思维的自由创造"，而是对于客观实在高度抽象的反映。正如恩格斯所说："自然界对这一切想像的数量都提供了原型。"

总的来说，数学的研究对象就其本性而言具有辩证的性质：它既是抽象思维的产物，又具有一定的客观实在性；在形式上是主观的，在内容上则是客观的。(在此我们也就可以更为清楚地看到数学家与诗人的类似之处：诗人无疑需要丰富的想像力，但是，艺术的生命在于真实，因此，和数学家的"作品"一样，诗人的作品也具有一定的辩证性，即既源于现实，又高于现实)。

显然，数学研究对象的辩证性质也就从又一角度更为清楚地表明了理论思维与

实践的辩证关系：它们既互相对立，又互相依赖，彼此不可分割地联系在一起。

三、数学发展的一般规律

依据前面的分析，我们也就可以对数学发展的一般规律作出简要的分析。

数学发展的重要特点之一是抽象程度的不断提高；但是，除去这种由具体到抽象的发展以外，数学中也存在有由抽象到具体的发展。实际情况是，数学不仅是实在世界的最一般性的量与空间形式的科学，而且也是现实世界的那些最具有特殊性、实践性与多样性的量与空间形式的科学。因为，如果不是这样来说明情况的话，则就未免太忽视计算数学（包括机器数学、数值数学、诺模图等）、统计数学（包括诸特殊分支）以及运筹学等部门在近代数学中的地位了。从而，就如徐利治先生在《数学方法论选讲》一书中所指出的，以下即应被看成关于现代数学的一个更为恰当的“定义”：“数学作为实在世界的最一般的量与空间形式的科学，同时又作为实在世界中最具有特殊性、实践性及多样性的量与空间形式的科学。”

总之，把数学的发展形式惟一地归结为抽象程度的不断提高是不妥当的。正确的说法应是：数学是在抽象与具体化的辩证运动中，在理论思维与实践的共同作用下，实现自己的无限发展的。

第5章 无限:数学家的迷宫

在欧氏几何的全体公设中,为什么惟有第五公设(平行公理)引起了人们极大的怀疑?数论中的一些问题,如哥德巴赫猜想等,为什么历经数百年的研究却仍然没有得到彻底的解决?微积分理论的本质是什么?集合论的本质又是什么?如果对这些问题进行研究的话,不难发现,它们都与无限的问题直接有关。正因为此,这些问题的解决才会显得如此之困难,以致耗费了人们大量的时间和精力;而也正因如此,它们才会对数学家们有如此巨大的吸引力,相应的研究结果也才会在数学中占有如此重要的地位。

例如,平行公理之所以会引起人们的普遍关注,主要地就是因为它与直线的无限性有关。然而,在长达1 000年的历史时期内,这一问题却成了数学家的一个"噩梦"。例如,非欧几何的创始人之一是匈牙利数学家鲍耶,其父在劝阻他别去从事平行公理的研究时就曾说过:"希望你不要再作克服平行线理论的尝试了。你会花掉所有的时间而终身不能证明这个问题。……它会剥夺你的一切余暇、健康、休息和所有的幸福。这个地狱般的黑暗将吞食掉成千个像牛顿那样的巨人。……这是永远留在我心里的巨创。"但是,鲍耶并没有听从父亲的劝告,而是坚持从事平行公理的研究,并最终"从乌有中创造出了另一个新奇的世界"。

另外,也只有认识到自然数的无限性质,我们才能深切地体会到哥德巴赫猜想等问题的困难程度。在数学的发展历史上,阿基米德就曾创造出了书写任意大的数的方法。在"计砂法"一文中,他曾自豪地写道:"有人认为,无论是在叙拉古,还是在整个西西里岛,或者在世界上所有有人烟和无人迹之处,沙子的数目是无穷的。也有人认为,这个数目不是无穷的,然而要表达出比地球上沙子数目还要大的数字是做不到的。……但是,我要告诉大家,用我的方法,不但能表示出占地球那么大地方的沙子的数目,甚至还能表示出占据整个宇宙空间的沙子的总数。"阿基米德所给出的方法与现代的记数法是相类似的,用它们的确可以写出任意大的数来;但是,难道我们能用这样的方法把所有的自然数都写出来吗?显然不能!因为,无论我们达到了多么大的数,与无限的自然数序列相比,也只是后者的一个微不足道的部分。从而,就如诗人哈莱所说:

"我将时间堆上时间,世界堆上世界,

将庞大的万千数字,堆积成山,

假如我从可怕的峰巅，
晕眩地再向你看，
一切数的乘方，不管乘千万遍，
还是够不着你一星半点。”

正因为有无穷多个自然数，想要彻底解决哥德巴赫猜想那样的问题就是十分困难的。但是，数学家们并没有因此而感到畏惧，他们决心用自己的辛勤劳动来征服无限。例如，我国数学家陈景润就是一个奋力攀登哥德巴赫猜想这一科学高峰的勇士。他废寝忘食，潜心思考，探测精蕴，进行了大量的推理和演算。终于登上了(1+2)的台阶。

无限的王国就是那样的神秘莫测、难以征服，它吸引着一批又一批、一代接一代的数学家为攀登无限的高峰而奋斗。正如希尔伯特所说：“从来就没有任何问题能像无限那样，深深地触动着人们的情感；没有任何观念能像无限那样，曾如此卓有成效地激励着人们的理智；也没有任何概念能像无限那样，是如此迫切地需要予以澄清。”

在这一章中，我们将从方法论的角度对无限的问题进行分析和讨论。

第一节 思维“自由”想像的理想场所

国内的一个杂志曾经摘译了苏联关于平行公理的一篇小品文。这篇文章是这样写的：

“老师离开黑板，抖了抖手上的粉笔灰说：‘现在请大家做笔记：平行的两条直线，任意加以延长，永不相交。’

学生们低下头在本子上写着。

‘平行的两条直线……永不……相交……西多罗夫，你为什么不记呢？’

‘我在想。’

‘想什么呢？’

‘为什么它们不会相交呢？’

‘为什么？我不是已经讲过，因为它们是平行的呀。’

‘那么，要是把它们延长到一千米，也不会相交吗？’

‘当然啦。’

‘要是延长到两千米呢？’

‘也不会相交的。’

‘要是延长到5 000千米，它们就会相交了吧？’

‘不会的。’

‘有人试验过吗?’

‘这道理本来就很清楚,用不着试验,因为这是一条公理。……是不需要证明的真理呀。’

‘那么,不论什么定理都可以叫做公理,也就用不着证明了吗?’

‘不是任何一条定理都可以叫做公理。’

‘那么为什么这一条定理就可以叫做公理呢? ……’

‘因为这是欧几里得说的。’

‘要是他说错了呢?’

‘……你瞧,我在黑板上画给你看……怎么样,相交了没有?’

‘暂时没有。’

‘好,你再看,我在墙上接着画,……相交了没有?’

‘没有。’

‘你还要怎样呢?’

‘要是再延长,延长到墙的背面上去呢?’

‘现在我全明白了,你简直是个无赖,你心里很明白,但就是存心要跟我扯皮。’

……

‘出去!’老师喊了起来,‘收拾起你的书包见你的父母去吧。’

西多罗夫收拾起书包,抽泣着走出教室。”

显然,西多罗夫事实上并没有错;真正犯错误的却是他的老师。因为,他力图把学生的“自由想像”纳入某个固定的“框架”;而如果没有像西多罗夫那样的“探究”精神,就根本不可能有非欧几何的发展。

一般地说,正如第 4 章中所已指出的,丰富的想像力对于数学研究具有十分重大的意义;而无限则为思维的“自由”想像提供了最为理想的场所。因为,由于人类认识活动的有限性,对于与无限有关的问题就不可能依靠经验的方法直接地加以检验(例如,我们显然无法用实验的方法直接对两条平行直线无限延长是否会相交这一问题作出检验),而只能依靠想像、依靠理性思维去把握。这样,在无限的问题上,思维就获得了极大的自由性。例如,在射影几何中,直线就被想像成一种封闭图形:它的两端在无穷远点处连结了起来。另外,鲍耶则依据以下的想法而发展起了非欧几何:

“由已知直线外一点作直线与此相交,如果我们将所作直线围绕定点转动,交点就将越移越远,最终则将根本没有交点,但此时直线仍将微微倾向于已知直线(如图 5-1):

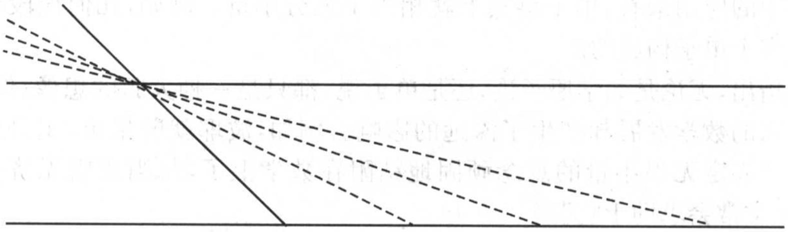


图 5－1

显然，如果将直线再转过去一点，就更不能与已知直线相交，除非它开始从另一方向倾向于已知直线(图 5－2)。从而，通过已知点就有两条临界直线：介于这两条直线之间的任何直线都不与已知直线相交，而那些弯曲得较厉害的直线则将与已知直线相交。”

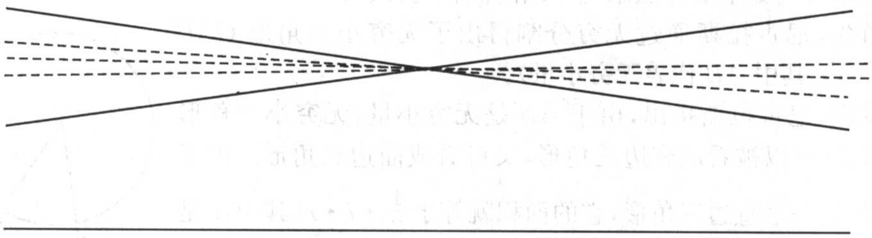


图 5－2

纵观数学的发展历史，这种由于无限而导致的自由想像曾极大地促进了数学的发展。非欧几何与射影几何的建立就是典型的例子。下面我们再对无穷小方法与康托的超穷数理论作简单的介绍。

一、变量数学的研究与无穷小方法

无穷小方法的早期萌芽　无穷小方法，笼统地说，就是对无穷小量的自由应用，而所谓的“无穷小量”则是指对于相应对象进行无穷分割的最终结果。

无穷小方法的早期萌芽可以追溯到古希腊。对此，著名微积分学家 C. 波耶曾指出：“通过公元前 5 世纪形成的学说，无穷小量的概念就已经作为希腊人关于物质世界本原的设想进入了数学思潮。”例如，古希腊最伟大的原子论者德谟克利特就曾把原子论的思想应用于数学，并提出了所谓的“数学原子论”，即认为几何形体是由特殊的“数学原子”组成的，而它们的面积或体积则分别等于由这些数学原子所组成的行列或原子层的总和。据称，德谟克利特曾依据这样的分析方法计算出了锥体的体积。另外，作为其哲学立场的具体表现，毕达哥拉斯学派也曾提出过所谓的“单子说”：按照这一学派的观点，单子是物质客体及整个自然界的终极元素；但是，如果从

其在数学中的应用来看，单子事实上就相当于无穷小量。例如，几何线段就被说成是由无限多个单子构成的。

应当指出，无论是数学原子论，还是单子说，都只是一种大胆的想像；但是，这些思想对后来的数学发展却产生了深远的影响。例如，波耶就曾指出，正是从德谟克利特开始，“固定无限小量的观念顽固地粘附在数学上了，每当逻辑无济于事的时候，直观就常常会求助于它”。

无穷小方法 16世纪前后，由于实践的需要，数学经历了由常量（初等）数学到变量数学的重要发展。在这一发展阶段中，无穷小方法起了核心的作用，因为，当时的数学家对变量进行研究的主要方法就是无穷小方法。

可以通过两个实例对无穷小方法加以说明：

【例1】 作为对于古希腊的无穷小方法的直接继承和发展，15世纪的红衣主教尼古拉斯曾用如下的方法求得了圆的面积（公式）：

首先，尼古拉斯通过无穷分割得出了无穷小三角形 OAB（图5-3。其中 AB 代表无穷小量）。

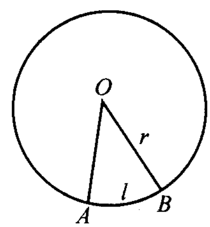


图5-3

其次，尼古拉斯指出，由于 AB 是无穷小量，无穷小三角形 OAB 就既可以被看成直边三角形，又可看成曲边三角形。由于 $\triangle OAB$ 是一个直边三角形，它的面积就等于 $\frac{1}{2}\cdot l\cdot r$（其中，$l$ 是 AB 的长，r 是圆的半径）；又由于它是一个曲边三角形，它的无穷累积就是圆，因此圆的面积就等于

$$\sum_{l}\frac{1}{2}lr=\frac{r}{2}\cdot\sum_{l}l=\frac{r}{2}\cdot 2\pi r=\pi r^{2}.$$

这样，尼古拉斯就利用无穷小方法求得了圆的面积。

【例2】 欧洲文艺复兴时期以后，由于研究运动物体的需要，无穷小方法得到了更加广泛的应用。例如，费马就曾利用以下的方法求得了非匀速运动物体的瞬时速度。

首先，截取一个时间间隔 Δt，并求出运动物体在这一时间间隔内所通过的距离 Δs；其次，求取 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$，显然，这就是运动物体在这一时间间隔内的平均速度；最后，令 $\Delta t\to 0$，这时所截取时间间隔就是一个无穷小量（dt），而相应的速度 $\frac{ds}{dt}$ 就是运动物体在这一时刻的瞬时速度。

由上面的例子可以看出，无穷小方法在这些问题中的应用应当说是十分自然的。具体地说，由于变量数学所研究的主要是非均匀的变化（从运动的角度说，就是非匀速运动；从几何的角度说，则是曲线形的问题），因此，关键就在于如何把非均匀的变化转化成（已经得到解决的）均匀变化来加以研究（或者说，“变非匀速运动为匀速运动”以及“化曲为直”）；另外，又由于无穷小量被认为是无穷分割的结果，而所谓

的"无穷分割"事实上就包含了对立面(匀速运动与非匀速运动、直与曲)的转化,因此,无穷小方法在微积分理论的形成时期就得到了广泛的应用。

与古希腊的"数学原子论"和"单子说"一样,无穷小方法在逻辑上也并非十分严格的(参见第二节);但是,在很长的时间内,大部分数学家并没有因此而感到忧虑,因为,实践的成功为他们提供了必要的信心。总的来说,在19世纪以前,无穷小方法一直是数学家们从事变量数学研究的主要方法,并实际促成了数学在几个世纪内的迅速发展。这就正如波耶所指出的:"不管如何,这个方法想得非常好,使它立刻为数学家们所接受。结果,无穷小不加鉴别地被引入分析学,牢固地占有这门学科的基础地位,直至两个世纪以后,才让位于严格定义的导数概念,成为微积分的基本概念。"事实上,即使在严格的极限理论建立以后,一部分数学家仍然坚持了无穷小方法的应用和研究;特别是20世纪60年代,无穷小方法通过鲁滨孙的工作在严密的逻辑基础上得到重建。

二、康托关于(无穷)集合与超穷数论的研究

集合的概念与一一对应原则 什么是集合?对此,集合论的创建者、德国著名数学家G.康托曾作过这样的描述:

所谓集合,是指把确定的、彼此可以加以区分的具体或想象的对象的任意组合看成一个整体。

由此,按照康托的解释,集合的概念就同时包括了有穷的集合与无穷的集合。

由于数学研究的需要,康托对集合、特别是无穷集合进行了数量研究。1874年,康托在这方面迈出了关键的一步,他提出了如下的"一一对应原则":

如果在两个集合的元素之间能建立一一对应,就说这两个集合具有相同的基数(即在数量上是相等的)。

由于康托所说的集合同时包括了有穷集合与无穷集合,因此,上述的定义事实上就把数量的概念从有限扩展到了无限,即是引进了无穷数(超穷数)的概念。例如,由于自然数集是一个无穷集合(这也是最简单的无穷集合),它的基数就是一个无穷基数——对此康托记为$\aleph_0$(读作阿里夫零)。另外,由于在自然数集合与所有偶数的集合之间可以建立如下的一一对应:

$$
\begin{array}{lllll}
1, & 2, & 3, & \cdots, & n, \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
2, & 4, & 6, & \cdots, & 2n, \cdots
\end{array}
$$

因此,偶数集的基数也是$\aleph_0$。

应当指出,康托所得出的上述结论在很大程度上是与人们的直觉直接相违背的。因为,这可以说是一个十分根深蒂固的观念,即"整体总是大于部分";然而,按

照康托的分析，尽管偶数集只是自然数集的一个部分，两者却具有相同的基数，也即在数量上是相等的。事实上，正是由于上述传统观念的影响，在很长时期内大多数数学家都认为无限不能成为数学的研究对象。例如，伽利略在1638年就曾指出过以下的事实：在自然数集合及其平方数的集合之间可以建立如下的一一对应（虽然后者也只是前者的一个部分）：

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & \cdots, & n^2, & \cdots \end{array}$$

伽利略并因此而得出了这样的结论："对无限来说，相等、大小等属性是无意义的。"

但是，康托并没有为传统思想所束缚，而是大胆地冲破了这一思想桎梏，从而发展起了一种新的数学理论——超穷数理论。例如，康托明确指出："两个集合，其中的一个是另一个的部分，而又具有相同的基数，这是经常会出现的，而且也没有什么矛盾。我认为，正是由于对这一事实缺乏认识，才形成了关于超穷数引进的主要障碍。"值得指出的是，康托还曾对所说的传统观念的错误根源进行了分析。他指出，这种观念的错误就在于：它"从一开始就期望那些数应当具有有穷数的一切性质，即是把有穷数的性质强加于无穷数之上"。然而按照康托的观点，"这些数如果能以任何形式被理解的话，倒是由于它们和有穷数的对立，因此，它们必须具有全新的数量特征，这些性质完全依赖于事物的本性，……而并非来自于我们的主观任意性或偏见。"显然，与传统观点相比，康托的认识是较为正确的；正因如此，康托才可能成功地发展起自己的超穷数理论。

对角线方法和康托定理　依据一一对应原则，康托首先对各种已知的集合，如自然数集、有理数集、实数集，直线上的点集，平面上的点集，n维空间中的点集，……进行了数量分析。康托所得出的某些结论是十分新奇的。例如，康托证明了：自然数集与有理数集具有相同的基数，即都等于$\aleph_0$。又，一条直线上的点集与n维空间中的点集具有相同的基数。（对此，康托自己写道："我看到了它（指上述结论的证明——注），但我简直不能相信它。"）

另外，对于超穷数理论的进一步发展来说，以下的结论是特别重要的：

实数集与自然数集具有不同的基数（即在这两者之间不可能建立一一对应）。

因为，这一结论清楚地表明了无穷集合在数量上并不都是相等的，从而就有必要系统地去发展一整套的超穷数理论。

康托是用所谓的"对角线方法"来证明上述结论的。例如，如果仅就(0,1)间的实数进行证明的话，相应的证明就可表述如下：

假设在(0,1)间的实数与所有的自然数之间建立了一一对应，那么，(0,1)间的每一实数都将获得一个编号数。现将编号数为n的实数表述为：

$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$

其中,$a_{ni}(i=1,2,3,\cdots)$是0,1,2,…9这十个数字中的一个。这样(0,1)中的所有实数就组成了如下的矩阵:

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

其中,$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}, \cdots$都处于对角线的位置上,因此我们就把它们统称为“对角线元素”。

现按照如下的法则构成一个新数$b=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,其中,

$$b_n=\begin{cases} a_{nn}+1, \text{如果 } a_{nn}\neq 8 \text{ 且 } a_{nn}\neq 9 \\ 1, \text{如果 } a_{nn}=8 \text{ 或 } a_{nn}=9 \end{cases}$$

由b的构成,它显然不同于任一a_n;但由于b也是(0,1)中的一个实数,因此,依据前面的假设,它又必然等同于某一a_n,矛盾。

从而,原假设为假。这也就是说,在(0,1)间的实数与自然数集之间不可能建立一一对应。

由于上述论证的关键在于构造出一个不属于已知集合(在此是指(0,1)间所有实数所组成的“可数集”:$\{0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots\}$)的“新”元素,而这一“新”元素则又是通过“对角线元素”的变动得以构造的,因此,这一方法就被称为“对角线方法”。

正因为存在数量上不相等的无穷基数,从而就有必要对超穷数引进“大小”的概念。康托所给出的关于基数“大小”的定义是这样的:

对于两个集合M与N来说,如果N可以与M的某一子集建立一一对应,M却不能与N的任何一个子集建立一一对应,就说M的基数大于N的基数。

由于自然数集显然可以与实数集的某一子集(即自然数集自身)建立一一对应,因此,由上述定义就可立即推出:实数集的基数大于$\aleph_0$。

从而,如果用c表示实数集的基数,就有$c>\aleph_0$。

其次,作为对角线方法的进一步应用,康托又证明了如下的结论:

在任一集合S与其幂集PS(这是由S的所有子集组成的集合)[11]之间不可能建立一一对应。

又由于在S与PS的某一子集(即S自身)之间显然可以建立一一对应,因此,依

---

[11] 例如,设$S=\{1,2\}$,则PS就是由以下四个集合所组成的一个集合:
Φ(空集),$\{1\}$,$\{2\}$,$\{1,2\}$。

据上述关于基数大小的定义，就有：

任一集合的幂集的基数大于这一集合的基数。

这就是著名的“康托定理”。

康托定理的证明是这样的：

假设在某一集合 S 与其幂集 PS 之间建立了一一对应关系（记为 f），我们就可用 S 中（在这一对应下）的相应元素来作为 S 的各个子集（即 PS 中的每一个元素）的“代表”。在此我们就将与 S 中的元素 x 相对应的 S 的子集 M 记为 fx。

现就任意的 fx 考虑相应的 x 是否属于 fx 的问题。显然，这时只有两种可能的情况：或者 $x\in fx$，或者 $x\notin fx$。进而，我们则又可以组成如下的集合：

$S'=\{x\mid x\in S \text{ 且 } x\notin fx\}$。

由于 S' 也是 S 的一个子集，因此，依据上述假设，就有 $z\in S$，使得 $S'=fz$。依据排中律这时又必须或者有 $z\in S'$，或者有 $z\notin S'$。但如果 $z\in S'$，则由 S' 的定义立即可以得出 $z\notin fz$，即 $z\notin S'$，矛盾；而如果 $z\notin S'$，即 $z\notin fz$，则由 S' 的定义又有 $z\in S'$，矛盾。由于矛盾是不可能避免的，这就证明了原假设为假，即在 S 与 PS 之间不可能建立一一对应。

如果用 2^a 来表示基数为 a 的集合的幂集的基数，康托定理就可表示为：

$2^a>a$；

显然，如果我们由自然数集出发无限制地去实行幂集的构造，则就可以得出无穷多个越来越大的基数：$\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \cdots$。

延伸原则与穷竭原则 如果一个集合的任何两个元素之间都具有确定的次序关系，那么，这一集合就称为是全序的；又如果某一全序集合的任一非空子集都有一个最“先”元素（在给定的次序下），则称此集合为良序集合。

对于良序集合来说，除去基数以外，康托还引进了序数的概念：[12]

如果在两个良序集合之间可以建立保序的一一对应，就说它们有相同的序数。

和基数的研究一样，自然数的集合也是最简单的无穷良序集合。康托把自然数集的序数记为 ω，并以此为基础构造出了无穷多个越来越大的序数。具体地说，康托在此反复应用了如下几条原则：

（1）延伸原则

由任一给定的序数出发，可以通过“延伸”得出新的更大的序数。例如，由 ω 出发，就可得出 $\omega+1, \omega+2, \cdots$。

（2）穷竭原则

给定任一有特定顺序、但其中并无最大元素的集合，可以通过“穷竭”得出一个

---

[12] 对于有穷集合来说，基数与序数的概念是一致的；但是，对于无穷集合来说，这两个概念就不相同了。例如，由下面的介绍可以看出，两个具有相同基数的集合，它们的序数完全可能不相等。

新的序数，它大于原集合中的任何一个序数。

例如，从 1,2,3,…出发，通过“穷竭”就可得出 ω；从 $\omega+1,\omega+2$,…出发，则可得出 $\omega+\omega$，即$\omega\cdot2$；等等。

由此，通过延伸原则与穷竭原则的反复应用，我们就可得出无穷多个越来越大的序数：

$\omega,\omega+1,\omega+2$,…(这是延伸)；直至 $\omega+\omega$，即 $\omega\cdot2$(这是“穷竭”)；$\omega\cdot2+1,\omega\cdot2+2$,…(这又是延伸)；直至$(\omega\cdot2)+\omega$，即 $\omega\cdot3$(这又是“穷竭”)……

上面这些序数是各不相同的；但是，可以证明，它们又都具有相同的基数$\aleph_0$(因此，康托把它们统称为“第二类的序数”)。由于在第二类序数中并无最大的数，因此，依据穷竭原则，又可得出一个新的序数 ω_1。在康托看来，这就是“第三类序数”的开始数，也即可由 ω_1 出发，通过延伸原则和穷竭原则的反复应用，又一次得出一系列的新的序数：ω_1+1,ω_1+2,…。由于这些序数又都具有相同的基数(对此，康托记为$\aleph_1$)，因此康托就把它们统称为“第三类的序数”。

上述过程显然可以无限制地继续下去。

最后，作为基数分析的一般原则，康托又引进了如下的“限制原则”：

(3) 限制原则

每一个新数类的基数大于前一个数类的基数，而且是第一个这样大的。

从而，通过上述三个原则的反复应用，我们就可得出一系列的序数类，它们的开始数分别为：

$\omega,\omega_1,\omega_2,\cdots$；

它们的基数则分别为：

$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots$。

集合论的“胜利” 由于康托的集合研究是对于传统观念的直接挑战，因此，他的理论从一开始就遭到了剧烈的反对；但是，集合论很快就显示出了强大的生命力。例如，在 1897 年召开的第一次国际数学家大会上，A. 赫尔维茨和阿达玛就曾指出了超穷数理论在分析中的重要应用；不久以后，集合理论又在测度论与拓扑学中得到了进一步的应用。更为一般地说，又如前面所已指出的，随着现代数学基础研究的深入，集合论已成为整个数学的基础，这样集合论在现代数学中也就占据了越来越重要的地位。由于集合论实质上就是关于无限的数学理论，因此，就如希尔伯特所指出的：“在弗雷格、戴德金和康托的全力扶持下，无限的观念可谓盛极一时，并终于登上了皇位，无限在它的扶摇直上的发展中达到令人眩晕的高度。”显然，这种高度的成功也就是思维“自由”想像的光辉成就。

综上可见，无限的确为数学家的“自由”想像提供了理想的场所，而且，这种思维的“自由”想像又不是毫无意义的思想游戏，而是对于数学的发展有着十分重要的意义。事实上，从古希腊人对于无理数(无限不循环小数)的认识开始，人类对于数学

无限的认识的每一次深化都导致了数学的重大进展。从这样的意义上，我们也就可以说，数学就是无限的科学。

第二节　对于人类智慧的重大挑战

一、潜无限与实无限的观念

如前所述，无限的问题在数学的研究中占有特别重要的位置。但是，究竟什么是无限呢？或者说，究竟什么是无限的本质呢？对此，数学家们（及哲学家们）的看法是各不相同的。归根结底地说，这种分歧又可归结为两种无限观，即潜无限的观念与实无限的观念的斗争。

笼统地说，所谓潜无限的观念是指把无限看成一种过程、一种永无止境的生成过程；实无限的观念则是把无限看成一种已经生成了的（或现实存在的）对象。在人类的文明史上，古希腊的亚里士多德最早提出了潜无限和实无限的区分。他明确地采取了"潜无限论者"的立场，即认为只能承认潜无限，而不能承认实无限。例如，亚里士多德指出："量在现实上不是无限的，但分起来却是无限的，因此，只有潜能上的无限。但是不应把这里的'潜能的'和塑像是'潜能的'一样看待；后者意味着，将有一个现实的塑像，但无限不是这样，不会有现实的无限。"

亚里士多德是通过（数学）无限的具体分析得出上述结论的。他指出，（数学）无限有两种基本形式，即加起来的无限与分开来的无限。由于在分的方向上可以小得超过任一给定的量，而且永远还会有更小的量；又由于在加的方向上可以大得超过任一给定的数，而且永远还会有更大的数，因此，亚里士多德认为，相应的实无限对象（无穷小量、无穷数）是不存在的，或者说，它们都只是一种潜在的存在。例如，亚里士多德写道："无限的数是潜能的，不是现实的，是所取的数永远不断地超过任何已定数。……它是不停止的，不断更新的，就像时间和时间的数一样。"他又说："（无限）在量方面的表现是，被分的量永远有剩余……"

两种无限观的区分并不是一种纯粹的哲学争论，它对于数学的研究也具有十分重大的意义。例如，究竟应当把全体自然数看成一种完成了的集合（即是采取实无限的观念），还是看成一种永无止境的生成过程（即是采取潜无限的观念），就直接影响着超穷数理论的建立。因此，从亚里士多德开始，在数学的历史发展中始终贯穿着两种无限观的斗争，而争论的焦点就在于究竟应当如何看待实无限的概念和方法在数学中的应用。正如美国数学家柯亨所指出的，"对于无穷集合的态度始终是数学家之间的根本分界线所在"。

二、贝克莱悖论与严格的极限理论的建立

芝诺悖论及其对于古希腊数学发展的影响 如前所述,德谟克利特的"数学原子论"与毕达哥拉斯学派的"单子说"可以看成无穷小方法的早期萌芽;然而,也正是从古希腊的时代开始,一些哲学家就已对无穷小量的自由应用提出了怀疑。例如,针对毕达哥拉斯学派所提出的线段是由(无穷多个)单子所组成的理论,埃利亚学派的芝诺就曾提出"单子是否有长度"的问题。他指出:"如果单子有长度的话,那么无限多个单子就将构成一条长度无限的线;而如果单子没有长度的话,那么无限多个单子也将没有长度。"更为一般地说,芝诺还曾提出了如下四个著名的悖论:

(1) 两分法悖论

提出这一悖论的目的在于否定运动的存在,其理由是:在你穿过一段距离之前,必先穿过这个距离的一半;由于空间是无限可分的,因此在任何一定的空间中都有无穷多个点,而你不能在有限的时间内越过无穷多个点。

(2) 阿基里斯悖论

动得最快的东西(古希腊著名善跑者阿基里斯)永远追不上动得最慢的东西(乌龟)。因为,阿基里斯首先必须到达乌龟的出发点,这时乌龟会向前走了一段路;于是阿基里斯又必须赶上这一段路,而乌龟又会向前走了一段路;……因而,他只是愈追愈近,但却始终追不上它。

(3) 箭的悖论

飞的箭是静止的。因为,每件东西在占据一个与它自身相等的空间时是静止的,而飞着的东西在任何一定的瞬间总占据着一个与它自身相等的空间,因此它是不动的。

(4) 运动场悖论

一半的时间可以等于一倍的时间。假设有三列物体,其中的一列(A)当其他两列(B,C)以相等的速度向相反方向运动时是静止的(图 5-4 甲)。在 B,C 走过同样一段距离的时间中,B 越过 C 的数目,要比它越过 A 列中物体的数目多一倍(图 5-4 乙)。因此,它用来越过 C 列的时间要比它用来越过 A 列的时间长一倍;但是 B 和 C 用来走到 A 的位置的时间却是相等的,所以一倍的时间等于一半的时间。

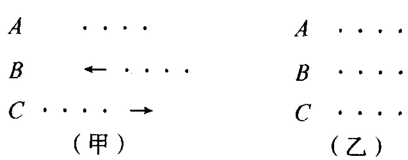


图 5-4

从历史上看,芝诺的上述悖论主要是用来反对赫拉克利特的流动说(运动说)与

维护埃利亚学派的静止说的；但由于这些悖论除了直接涉及空间和时间的概念以外，还与无限的问题有着密切的联系（一般认为，前两个悖论建立在潜无限的观念之上，因为其中假设了对于时、空的分割是可以无限地继续下去的；第三个悖论则建立在实无限的观念上，因为其中假设了时间是由瞬间组成的），因此，芝诺悖论的提出也就表明当时的人们对于无限的认识还缺乏严密的逻辑基础。一些数学史家认为，后者并最终导致古希腊人对于无限采取一种笼统的排斥态度。例如，波耶就曾指出："希腊数学家（包括阿基米德在内）是把无限排斥在他们的推理之外的。他们之所以排斥无限，原因很明显：直觉这时还不能为它提供一幅清楚的图画，再则，它也没有一个逻辑基础。"

贝克莱悖论　正如前面所已指出的，16 世纪前后，由于实践的需要，无穷小方法在数学中又一次得到了广泛的应用与进一步的发展。但是，与古希腊的"数学原子论"或"单子说"一样，当时的无穷小方法也缺乏严格的逻辑基础，从而，也就有所谓的"贝克莱悖论"。

笼统地说，贝克莱悖论可以表述为"无穷小量究竟是否为零"这样一个问题：就无穷小量的实际应用来看，它必须是零又不是零；但从形式逻辑的角度说，这无疑是一个矛盾。

例如，就圆的求积问题（第一节例 1）而言，如果认定无穷小量 AB 为零，那么无穷小三角形 OAB 就根本无面积可言（这时也根本不存在什么三角形）；而如果认定无穷小量 AB 不为零，那么无穷小三角形就仍然是曲边三角形，从而就不能用计算直边三角形的方法去计算它的面积。

类似地，就非匀速运动的问题（第一节例 2）而言，如果认定无穷小量 dt 为零，那么$\frac{ds}{dt}$就相当于$\frac{0}{0}$，按照数学的传统法则，这是无意义的（这时也根本没有运动发生）；而如果认定无穷小量 dt 不为零，这时所求得的$\frac{ds}{dt}$就仍然是平均速度，而不是瞬时速度。

正因为无穷小方法包含有矛盾，因此，早在 1694 年，荷兰数学家纽文蒂就对无穷小量的应用提出了指责。其后，在贝克莱于 1734 年出版的名为《分析学家》的小册子中，这种指责更达到了高潮，因为，尽管贝克莱的目的在于通过对微积分理论的批评为神学辩解，但这一著作的确十分有效地揭示了无穷小方法中所包含的逻辑矛盾（也正因如此，上述矛盾就被称为"贝克莱悖论"）。

分析的严格化与严格的极限理论的建立　由于来自实践的信心，数学家们在很长时期内仍然坚持了无穷小方法的应用："他们完全陶醉于已取得的物理成就，以致在绝大部分情况下，对失去的严密性无动于衷。"但是，理论在数量上的增长必然会引起更好的论证理论、使理论系统化、批判地审查理论的基础这样一些任务。到了 19 世纪，数学界中就出现了一个叫"批判"的运动，这一运动的目的是为微积分理论

奠定一个可靠的逻辑基础,它的最终成果则是严格的极限理论的建立。

一般认为,近代意义下的严格的极限理论是由法国数学家柯西所奠定的。他在这一方面的主要工作有:

首先,柯西给出了如下的关于极限的定义:

"若代表某变量的一串数值无限地趋向某一数值时,其差可任意小,则该固定值称为这一串数值的极限。"

这一定义完全摆脱了与几何直观的联系,是直至那时为止所给出的关于极限的最为清楚的定义。

其次,以极限概念为基础,柯西分别建立了连续、导数、微分、积分等理论。例如,柯西所给出的关于导数的定义是这样的:

设函数为 $y=f(x)$。给变量 x 以一个增量 $\Delta x=i$;再作比式$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$,这一比式在 i 趋向 0 时的极限(如果它存在的话)就称为 y 对于 x 的导数。

在柯西以后,德国数学家外尔斯特拉斯等进一步从事了这一方面的研究。例如,1872 年,外尔斯特拉斯、戴德金、康托三人几乎同时地建立了实数理论,从而为微积分理论奠定了一个"可靠"的基础。另外,外尔斯特拉斯又提出了著名的"ε—δ 原则",即是用如下的方式给出了极限的定义:

设 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$定义域内的一点。若对给定的任一随意小的数 ε,总可求得另一数 δ,使得对于一切与 x_0 相差小于 δ 的 x 而言,相应的 $f(x)$与某一数 L 的差都小于 ε,则称数 L 为函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限。

这样,极限的概念就不再包含有"运动"的意义,即完全克服了表达上的含糊性。

将严格的极限理论与无穷小方法加以比较,可以看出:

第一,由于无穷小量被认为是无穷分割的结果,即是一种实无限性的对象,因此,无穷小方法实质上建立在实无限的观念之上。与此相反,极限理论则建立在潜无限的观念之上,因为,按照柯西等人的定义,极限的概念所强调的是(逼近)过程的无限性,从而就是一种潜无限性的概念。

第二,由于严格的极限理论完全排斥了实无限意义上的无穷小量(例如,尽管在极限理论中有时也提到无穷小量,但后者被定义为"以零为极限的变量",也即可以无限地趋近于零,但绝对不等于零,从而就只是在潜无限的意义下得到了应用),因此,贝克莱悖论在形式上就得到了排除。正因如此,从 19 世纪下半叶起,极限理论就逐渐取代无穷小方法并在分析中占据了统治地位,而这也就意味着对于数学中实无限观念的否定。

三、集合论悖论与数学的基础“危机”

康托的实无限观念 在分析的严格化后不久，由于康托的集合论研究，数学中的无限观又经历了一次重大的变化。

由前面的介绍可以知道，集合论特别是超穷数理论，事实上建立在实无限的观念之上，因为如果不承认实无限的概念和方法，那么，即使是超穷数理论的最简单开展也是不可能的。例如，所谓的“穷竭原则”事实上就是指把相应的集合看成是完成了的对象，而如果没有穷竭原则，第一个无穷序数 ω 的引进就是不可能的；另外，如果没有对角线方法，也就不可能开展出基数理论，而对角线方法事实上也建立在实无限的观念之上，因为，只有“走遍”原来的集合（例如，由所有的 $a_n=0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$所组成的集合），我们才能用对角线方法构造出不属于这一集合的“新”元素（$b=0.b_1b_2\cdots$）。

对于这种实无限的立场，康托本人也是清楚地认识到了的。例如，针对各种反对的意见，康托就曾明确地指出，在数学中要完全排斥实无限的概念是不可能的。因为，首先，数学中很多最为基本的数学概念，如一切正整数、圆周上的一切点等，事实上都是实无限的概念；其次，极限理论归根结底地说仍然建立在实无限的概念之上，因为，极限理论是以实数理论为基础的，而实数理论的建立则必须以这样或那样的实无限概念作为基础；最后，承认作为变量的潜无限就必须承认实无限，因为，变量如能取无穷多个值，则就必须有一个先前给定的、不能再变的取值域，而这个域就是一个实无限性的对象。

正因为康托的集合理论建立在实无限的观念之上，因此集合论的“胜利”就被认为是实无限观念的胜利。或如数学家瑞德所说，无限终于“被关进了数学家的笼子”。

集合论悖论与数学的基础“危机” 然而，正当数学家们为集合论的“胜利”感到欣喜的时候，在集合论中却又发现了悖论。其中，最著名的就是罗素在 1902 年提出的“罗素悖论”：

按照一个集合是否属于自己可以对集合进行归类。现将所有那些不属于自身的集合组成一个新的集合，并记为 S_0，从而就有 $x\in S_0\leftrightarrow x\notin x$。

现考虑 S_0 是否属于自己。依据排中律，这时必然有 $S_0\in S_0$，或 $S_0\notin S_0$。但是，如果 $S_0\in S_0$，则由 S_0 的定义（它仅由那些不属于自己的集合所组成）可知，S_0 不属于自己，即 $S_0\notin S_0$，矛盾；而如果 $S_0\notin S_0$，则仍然由 S_0 的定义（它由所有那些不属于自己的集合组成）可知，S_0 属于 S_0，即 $S_0\in S_0$ 矛盾。

从而，矛盾是不可避免的。

除去罗素悖论以外，集合论中还有所谓的“康托悖论”和“布拉里—福蒂悖论”，它们分别涉及康托的基数理论和序数理论。

康托悖论是这样的：

依据康托定理,任一集合 M 的幂集 PM 的基数大于 M 的基数。如果我们用 $\overline{\overline{M}}$ 表示集合 M 的基数,就有 $\overline{\overline{PM}}>\overline{\overline{M}}$。现考虑由所有集合组成的集合 S(称为大全集),依据康托定理,就有 $\overline{\overline{PS}}>\overline{\overline{S}}$;但由于 S 是全集,PS 就是它的子集,从而又有 $\overline{\overline{PS}}\leqslant\overline{\overline{S}}$,矛盾。

布拉里—福蒂悖论的构造与康托悖论是十分相似的:

依据序数理论可以证明,所有小于某一序数 β、且包含这一序数在内的一切序数所组成的集合也是良序集,而且它的序数就等于$(\beta+1)$。现考虑由所有序数组成的集合 W。可以证明,W 是一个良序集,因此有序数 Q。由定义可知:Q 大于任何一个序数;但 Q 本身也是一个序数,从而就有 $Q>Q$,矛盾。

对上述悖论进行分析,可以看出,它们涉及集合论(超穷数理论)中的各个基本概念,因此,这些悖论的发现就清楚地表明集合理论是包含有矛盾的。

悖论在数学中的出现是一件严重的事情。因为,正如著名逻辑学家塔尔斯基所指出的:“我们知道,一个有矛盾的理论一定包含假命题,而我们是不愿意把一个已被证明包含假命题的理论看成可接受的。”因此,悖论的出现就引起了人们对于集合论可靠性的怀疑。另外,又由于集合论已经成为整个数学的基础,因此集合论悖论所动摇的就不仅是集合论本身,而且是整个数学。即如希尔伯特所说:“必须承认,由于悖论的出现所造成的形势是难以忍受的。只要设想一下,数学中人人都在学习、使用的这些定义和演绎的方法,从来都被认为是真理和确定性的完美典范,但现在却导致了荒谬和矛盾。如果传统数学存在着缺陷和漏洞,我们将到何处去寻找真理和确定性呢?”这样,集合论悖论就直接导致了所谓的“数学基础危机”,而中心的问题就在于:我们究竟能否在数学中自由地去应用实无限的概念和方法?

按照一些数学史学家的说法,数学史上共有三次基础危机。导致第一次危机的是关于“不可公度的线段”存在性的证明与芝诺悖论:导致第二次数学危机的则是贝克莱悖论。一般认为,由于严格的实数理论与极限理论的建立,上述两次危机都已得到了解决。但是,现代的基础研究表明,实数理论与极限理论事实上都建立在集合论的基础之上,因此,在这样的意义上,由于集合论悖论所导致的第三次数学危机就可被看成前两次危机的继续与深化。

综上所述,考虑到无限的问题是如此经常地与悖论联系在一起,我们就不得不说,无限的问题是对于人类智慧的重大挑战。

第三节 无限的哲学与无限的数学

一、西方数学哲学诸流派之无限观

面对集合论悖论的挑战,数学家们当然不会漠然置之,他们开始了解决悖论的

努力。然而,由于无限观的不同,他们所采取的立场是各不相同,甚至是互相对立的,数学家们并因此而分裂成了不同的派别。下面就围绕现代数学哲学研究中两次主要的争论,对直觉主义、形式主义及柏拉图主义的无限观作一简要的介绍。⑬

直觉主义者与希尔伯特的论战 直觉主义者是现代数学基础研究的主要学派之一,其主要代表人物是荷兰数学家布劳维尔。直觉主义学派的形成与集合论悖论的发现有着直接的联系:直觉主义者认为,悖论在集合论中的出现并不是一件偶然的事情,它实质上是整个数学(不只是集合论)感染上严重疾病的一个征兆,而所说的疾病则就是已有数学的不可靠性。因此直觉主义者认为,为了解决数学的基础问题,就必须对全部已有的数学理论进行彻底的审查和改造,并应毫不犹豫地舍弃那些不符合"可信性"标准的概念和方法,并代之以新的"可信的"概念和方法。

作为直觉主义学派的创始人,布劳维尔突出地倡导了这样一种观点,认为只有直觉上能够得到"构造"的概念和方法才是"可信的"。正是从这样一种立场出发,直觉主义者对数学中的实无限概念和方法采取了完全排斥的态度。正如著名数学家外尔所说:"布劳维尔明确了这样一点,并使我对此不再有任何疑义,那就是没有任何证据能证明那种关于全体自然数的整体性存在的信念……自然数序列能通过不断地达到下一个数而超越任一已达到的界限,从而就开辟了通向无限的可能性。但它永远停留于创造(生成)的状态中,而决不是一个存在于自身之中的事物的封闭领域。"外尔又进一步指出:"对于潜无限和实无限概念的混淆正是我们的各种困难(包括悖论)的根本原因所在。"因此,直觉主义者在数学研究中坚持采取了潜无限的立场,即只承认潜无限,而不承认实无限。

由于坚持构造性的立场,也由于完全排斥了实无限的概念和方法,直觉主义者对大部分已有的数学理论采取了否定的态度,后者甚至造成了使数学"支离破碎"这样一种局面。但是,直觉主义者认为这是使数学合理化的一个必要步骤。例如,直觉主义的另一代表人物黑丁就曾明确指出:"必须把由于直觉主义的反对而造成的数学的支离破碎,看成是我们的观点的一个不可避免的推论。"

正因为直觉主义者对大部分已有的数学理论采取了否定的态度,因此,在许多数学家看来,直觉主义的立场是不能接受的。例如,克勒易塞尔曾指出:"单凭这一点,就足以断定直觉主义是一种错误的态度。"但是,我们究竟应当怎样去看待数学中的实无限概念和方法呢?又应当怎样去排除(并防止)因此而导致的悖论呢?正是为了解决上述问题,希尔伯特自 1917 年开始集中地从事了数学基础的研究,并提出了著名的"希尔伯特规划"。

从无限的角度看,希尔伯特所采取的可以说是一种"方法论的实无限者"的立场。具体地说,与直觉主义者相仿,希尔伯特也对实无限的概念和方法在数学中的

---

⑬ 关于这些学派的一般性数学观可见夏基松、郑毓信,《西方数学哲学》,人民出版社,1986

应用感到忧虑,并认为绝对的可靠性只存在于有限的范畴。但是,与直觉主义者不同的是,希尔伯特认为不需要、也不应该因此而牺牲已有的数学理论中任何有价值的部分。作为一种"折中"立场,希尔伯特提出,在坚持有限性立场的同时,我们可以把那些非有限的成分作为"理想元素"引入到数学之中。希尔伯特并突出强调了引进非有限成分的方法论意义。他指出,这可以使证明简化,使不同的理论得到统一,……但希尔伯特同时又认为这些"理想元素"仅仅是一种"说话的方式",而不具有任何真实的意义。例如,希尔伯特指出:"正像在无穷小计算的极限过程中,在无穷大和无穷小意义下的无限已被证明仅仅是一种说话方式,我们也必须认识,在无穷整体意义下的无限……也仅仅是一种假象。"由于希尔伯特突出地强调了实无限性对象的方法论意义,因此,其所采取的就可说是一种"方法论的实无限论者"的立场。

为了保证理想元素的引进不会导致错误(矛盾),希尔伯特指出,应当证明包含有理想元素的数学理论是相容的。具体地说,由于认为理想元素不具有任何真实意义,因此,按照希尔伯特的观点,在实行上述研究时,首先就必须把包含有理想元素的数学理论组织成形式系统。为了保证所说的相容性证明、也即元数学研究的有效性,我们则又应当立足于有限的数学,也即必须以有限的数学作为元理论,因为,不然的话,我们在此就犯了循环论证的错误,即是用一种自身的可靠性尚未得到证明的理论来证明另一种理论(甚至就是自身)的可靠性。从而,总的来说,我们就应用有限的方法去证明由已有的数学理论抽象而出的形式系统的相容性。这也就是所谓的"希尔伯特规划"。在希尔伯特看来,一旦这一规划得到了实现,非有限的理想成分的应用与有限性的立场就得到了统一,数学的可靠性问题也得到了彻底的解决。

由于希尔伯特坚持实无限的概念和方法在数学中的应用,在20世纪20年代前后,在希尔伯特与直觉主义者之间就爆发了剧烈的争论。例如,针对希尔伯特所提出的规划,布劳维尔就曾提出了这样的指责:"理论的相容性并不足以保证理论的可靠性,因为,相容性无非就是'自圆其说',而谎话也是可以自圆其说的。"他写道:"一个假的理论终究是假的,即使人们找不到矛盾;正如一个犯罪行为总归是罪恶的,不管它有无受到法庭的判决。"另外,希尔伯特则把直觉主义者否定大部分已有的数学理论的立场斥之为对"科学的背叛"。

由于数学的实践已经清楚地表明从数学中完全排斥(或用潜无限的概念和方法取代)实无限的概念和方法是行不通的,因此,一般认为,在直觉主义者与希尔伯特的争论中,直觉主义是失败了;但是,由于希尔伯特的规划最终也被证明是不可能实现的,因此,直觉主义的失败就不能被看成对于"方法论的实无限论者"这一立场正确性的"证明"。

形式主义与柏拉图主义的论战 20世纪30年代后,直觉主义者与希尔伯特之间的争论逐渐消沉下去了,代之而起的是形式主义者与柏拉图主义者之间的争论,争论的焦点也由实无限的概念和方法在数学中应用的合理性转移到了实无限性对

象的客观实在性问题。

在一定的意义上，希尔伯特可以看成形式主义的创始人，因为就无限观而言，现代的形式主义者完全继承了希尔伯特的立场，即是采取了"方法论的实无限论者"的立场。例如，形式主义的主要代表人物之一鲁滨孙（他也是非标准分析的创建者）就曾提出：

"我关于数学基础的主张建立在以下两个主要的观点之上：

（1）无论从'无穷整体'这一名称的哪一种意义来说，无穷整体都是不存在的（即真实的无穷不存在，理想的无穷也不存在）。更严格地说，就是关于无穷整体的任何讲话或意谓实际上都是无意义的。

（2）然而，我们还是应该'像通常那样'去从事数学活动，即我们做起来就好像无穷整体真是存在的那样。"

现代的形式主义者认为，一切数学对象都是无意义的符号，数学命题则是按照一定法则组成的符号系列，对此没有、也不可能给出解释，我们在数学理论中所从事的就是按照事先给定的法则去对无意义的符号系列进行纯形式的组合与变形（演算）。从形式主义的历史形成来看，这种数学观与第 4 章中所介绍的形式化的研究方法（特别是希尔伯特的元数学研究）有着直接的联系；但是，必须明确的是，这已不再是一种从事数学研究的具体方法，而被发展成了一般的数学哲学观。

与形式主义相对立，数学中的柏拉图主义则是指这样一种观点，它把数学对象看成是不依赖于思维的独立存在。例如，柏拉图主义的主要代表人物之一贝尔纳斯就曾指出，数学中的柏拉图主义是指这样一种倾向：它切断了数学对象与认识主体的一切联系，并把数学对象看成一种独立存在的对象。由于柏拉图主义者认为数学对象是独立的客观存在，因此，就无限观而言，柏拉图所采取的就是"实无限论者"的立场，即是认为数学家们不仅可以"自由地"去应用实无限的概念和方法，而且应当明确承认实无限性对象的客观实在性。

从数学的发展历史看，柏拉图主义曾有过一定的积极作用。例如，著名数学史学家波耶就曾指出："从微积分兴起的观点来看，这个深入人心的柏拉图主义，在几个世纪中，对数学不是产生完全不幸的一种影响；因为柏拉图主义允许亚里士多德哲学和希腊数学的严密性所否认的东西进入几何——那就是为柏拉图主义和经院派哲学家所孕育的无限大和无限小的概念的自由应用。"另外，被称为"当代最杰出的柏拉图主义者"的哥德尔也曾突出地强调了自己的数学哲学思想对于数学研究的影响。例如，哥德尔指出，关于一阶谓词演算的完备性定理之所以未能在他以前由其他人所证明，主要原因就在于"（他们）拒绝在元数学中使用任何非有限的概念和论证"。

虽然形式主义者和柏拉图主义者都承认实无限的概念和方法在数学中应用的合理性，但他们对于实无限性对象的客观实在性的看法是截然相反的，因此，在 20 世

纪 30 年代以后,围绕实无限性对象的实在性问题,在形式主义者与柏拉图主义者之间就展开了长期的争论,特别是 20 世纪 60 年代以后,随着连续统假设的独立性得到了证明,这种争论又出现了新的高潮。

但是,形式主义与柏拉图主义又都具有严重的理论困难和缺陷。例如,柏拉图主义的一个严重弊病就在于:“他没有能力说明像更高的无穷公理这样更高的公理的无穷无尽的序列的根源。”柯亨指出:“当考虑到一个充分不可达的基数时,甚至是最坚定的实在论者(即柏拉图主义者——注)也一定会退却的。”而形式主义者则明确承认:“这是一个事实,就是在一种我们沿未完全理解的方式下,那种在形式主义者看来是不可解释的数学和元数学产生了能用于实际思想和经验的结果。”总之,正如鲁滨孙所言:“这仍然是数学哲学的一个持久任务,就是要获得对于无限更深刻的理解。”

二、应当树立辩证唯物主义的无限观

辩证的无限观 西方的数学家们在无限的问题上陷入困境并不是偶然的,而是由其哲学思想的片面性所决定的。一般地说,无论就实无限的概念和方法在数学中的应用而言,或者是就实无限性对象的客观实在性而言,采取绝对肯定或绝对否定的态度都是错误的。因为,第一,数学的历史发展及现代的基础研究已经清楚地表明,要从数学中完全排斥实无限的概念和方法是不可能的,又由于这种应用的可能性事实上是由无限的客观实在性所决定的,因此,在上述问题上采取绝对否定的态度就是错误的;第二,又如悖论的发现所已表明的,由于无限的概念是抽象思维的产物,从而就必然地在一定程度上包含了对于真实的脱离,因此,在一定的条件下(例如,如果我们由概念去引出概念、在抽象上去进行抽象),这也就可能导致荒谬,从而,绝对肯定的态度也就是错误的。

事实上,与任何数学概念一样,数学无限就其本性而言也是辩证的:它既具有一定的客观实在性,又是抽象思维的产物。从而,在无限的研究中,我们也就既应强调思维的自由想像,又应强调严密的逻辑证明(以及实践的检验),也即应当把大胆的想像与严密的论证很好地结合起来。

为了更清楚地说明问题,还可以对潜无限与实无限的辩证关系作简单的分析。如前所述,潜无限与实无限的概念是互相对立的;但是,它们之间也存在相互依赖、互相转化的辩证关系。具体地说,任何潜无限的过程都必然具有相应的实无限性对象,任何实无限性的对象则又构成了相应的潜无限过程中的一个环节(犹如任一特定的时刻都是先前的无限发展过程的“终结”,同时则又构成了整个历史过程中的一个环节)。从这样的意义上说,我们也就可以提出如下的“双相无限性原则”:数学中的任何无限性对象都是潜无限与实无限的对立统一体。显然,这也就从又一方面表

明:片面强调任何一种无限观都是错误的。事实上,这也就是集合论悖论的根源所在:在这些悖论的构造中,人们首先片面地强调了集合的过程性和完成性(例如,在康托悖论中,这分别表现为通过幂集的构造而对集合实行无限扩张的可能性,以及对于大全集的绝对完成性的确认),然后,这种被绝对化了的环节又机械地被重新连结起来,这样,它们的直接冲突,即悖论的出现,也就不可避免了。

由于潜无限(的过程)主要反映了由有限向无限的转化,即有限与无限的同一性的表现,实无限作为一种完成了的对象则主要反映出有限和无限的对立,因此,潜无限和实无限的矛盾也就可看作是由有限和无限的矛盾派生而出的。而且,上述关于数学无限的"双相性"也就可以被表述成有限与无限的辩证统一:任何无限性对象既是无限的、又是有限的。事实上,数学无限的这种双相性就是客观世界的层次性在数量上的反映。也正因如此,在一定的限度内,我们仍然可以用经验的方法对包含无限的理论作出检验(例如,从整体上去考虑数学理论的真理性就是一种常用的方法),因为尽管无限并不具有直接的经验性,但是,在一定的条件下,无限和有限又是可以互相转化的,或者说,两者事实上都只是一个相对的概念。

综上所述,我们必须树立唯物辩证的无限观,因为只有这样,数学无限的问题才能得到正确的解决,数学也才能更好、更快地向前发展。

悖论研究的积极意义 如前所述,悖论的出现常常会引起人们对于相应的数学理论的怀疑,而且如果一个悖论的涉及面十分广泛的话(例如,当悖论在基础理论中出现时就是这样的情况),这种怀疑更可能导致所谓的"基础危机",因此,在这样的意义上,悖论就是一种"丑"("恶"、"伪"),即与前面所讲的(数学)美(善、真)构成了直接的对立。

但是,悖论在数学研究中所起的作用又并非总是消极的。例如,贝克莱悖论的提出最终促成了严格的极限理论的建立;另外,集合论悖论的发现也直接促进了公理化集合论与数学基础研究的深入发展。一般地说,这就正如塔尔斯基所指出的:"必须强调的是,悖论在现代演绎科学的基础的建立中具有特别重要的地位。正如集合论的悖论,特别是罗素悖论,曾经成为逻辑与数学无矛盾的形式化的成功努力的起点一样,撒谎者悖论和其他语义学悖论导致了理论的语义学的建立。"另外,逻辑学家贝特则更明确地断言:"现代逻辑中的许多最深刻的成果,都是从悖论的分析中产生的。"

事实上,悖论的研究具有这种积极意义是不足为奇的,因为从认识的角度看,悖论实质上是主观认识与客观实际的矛盾的反映,因此,对悖论的认识也就是对于历史局限性的一种认识,而只要具有正确的哲学思想,我们就可以通过悖论的解决而使认识实现新的飞跃。正如逻辑学家赫兹贝格所指出的:"悖论之所以具有重大意义,是由于它们使我们看到我们对于某些根本概念的理解存在多大的局限性,……事实证明,它们是产生逻辑和语言的新观念的重要源泉……"

综上所述,我们应当充分肯定悖论研究的积极意义。显然,从方法论的角度看,这也就表明了我们不仅应注意培养对于数学美的鉴赏能力,而且也应学会对于“丑”的分析能力;另外,提高分析、解决问题能力的一个重要环节,则又在于应当努力掌握和自觉应用辩证唯物主义的世界观与方法论。

第6章 数学方法论的现代研究

第一节 中国的数学方法论研究

一、数学方法论在中国的兴起

对数学方法论在我国的发展历程进行回顾，可以毫不夸张地说，著名数学家徐利治教授在这一方面发挥了特别重要的作用：他不仅在中国最早倡导数学方法论的研究，并且亲自参与这方面的工作，取得了一系列重要的创造性成果。

具体地说，徐利治教授在1980年出版的《浅谈数学方法论》是中国学者在这一领域中所撰写的第一部著作。尽管这一著作篇幅不大，却是在中国(乃至在世界上)首次引进了“数学方法论”这个专有名词，并清楚地指明了数学方法论研究的意义：“我们从事数学工作的人，……其中包括大量的中学和大专学校的数学教师们以及一些专职的科研工作者，为什么应该重视数学方法论的研究呢？我想回答是简单的：有出息的数学工作者总是要在数学科学中有所作为、有所创新的。尤其是数学教师们总是希望能够多教出些有创造发明才能的学生来。因此，怎样去研究解决数学问题，怎样才能去发现数学原理和创造数学方法，这些属于‘方法论’范畴的问题，自然需要引起足够的注意和认真的研究。”值得指出的是，这一著作原是根据徐利治先生1978年秋至1979年夏给大连市中学教师、吉林省教育学院理科教师进修班及吉林大学数学系学生作报告的提纲写成的，从而，这也就十分清楚地体现了我国数学方法论研究的一个重要特点，即是与实际的数学活动、特别是数学教学密切相联系的。

与《浅谈数学方法论》相比，徐利治教授于1983年出版的《数学方法论选讲》可以说达到了更高的水平：尽管后者“并不是关于数学方法论的系统论述，而只是选择了十几个公认为比较有趣的专题”，但是，这一著作已经包括了一些具有重要意义的研究成果，如“关系映射反演原则(RMI方法)”等；另外，同样重要的是，这一著作并对“数学方法论”这一概念作了更为具体的说明：“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问”——从后来的发展看，中国的数学方法论研究基本上就是在这一范围中开展的。

相对于上述的早期工作而言，数学方法论在20世纪80年代中期以后得到了更

为迅速的发展。具体地说，这首先就是指取得了更多的研究成果。例如，以下就是以徐利治教授为首的研究集体所取得的一些主要成果：

（1）数学抽象的方法与抽象度分析法

鉴于数学抽象在数学活动中占有特别重要的地位，因此，数学抽象的方法就应被看成数学方法论研究的一个重要内容，特别是"模式的建构与研究"，更可被看成数学思维最为重要的特性。

作为模式建构方法的具体分析，我们又可作出关于"弱抽象"和"强抽象"，"同向思维""逆向思维"与"悖向思维"的区分，并总结出相应的方法论原则，即如"特性分离一般化原则""关系定性特殊化原则""悖向思维和谐性原则"等。

最后，所谓的"抽象度分析法"则可看成关于数学抽象的定量分析，而其实际出发点则就是引进了"抽象度""入度""出度"等概念。由于抽象度分析法可以被用于揭示各种具有丰富内涵的数学理论的内在结构，因此对于数学研究与数学教学都具有重要的意义。（详见徐利治、郑毓信，《数学抽象的方法与抽象度分析法》，江苏教育出版社，1991）

（2）化归原则与关系映射反演方法

由于"问题解决"构成了数学活动（包括数学研究和数学教学）最为基本的形式，因此，解题思维模式的研究也是数学方法论研究的一项重要内容。当然，对于这里所说的解题思维模式必须与某些人所热衷的"解题术"予以明确的区分。具体地说，与波利亚关于"数学启发法"的研究（对此可见以下的论述）相同，数学方法论中关于解题模式的研究其主要目标也是希望能够通过成功的实践总结出一般的方法或模式，从而对于新的数学解题活动就起到一定的启发和指导作用；与此相对照，"解题术"的研究在很大程度上则是希望通过大量的练习能把"问题解决"这一创造性的思维过程转变成为机械的、模仿性的活动，从而，尽管后一做法在对付各种各样的考试、甚至包括数学竞赛时具有一定的短期效果，但是，这种做法却是不应提倡的。

正是从思维模式的高度进行分析，"化归原则"就应被看成一种十分有效的解题思维模式；另外，所谓的"关系映射反演原则"（RMI 方法）则更可以被看成化归原则在现代数学研究中的具体应用和重要发展。（详见第 1 章第二节）

（3）数学美与数学中的美学方法

美感、直觉与形象思维等可以被说成数学研究中的非逻辑成分。就这些成分的研究而言，彭加勒的有关论述是特别重要的（详见《科学的价值》，光明日报出版社，1988），因为，这些论述深刻地揭示了数学发明创造的本质及其与美感和直觉的关系。但是，由于彭加勒主要是从发明心理学的角度进行阐述的，因此，从方法论的角度进行分析，彭加勒的研究仍然具有一定的局限性，特别是就数学方法论的研究而言，以下的问题显然更为重要：在数学研究中我们能否更为自觉地去运用审美直觉并总结出相应的方法原则？我们又应如何去培养或提高数学的直觉能力？

正如第3章中所提及的，尽管人们对于数学的美感具有强烈的感情色彩，而且不同的人关于数学美的标准也各不相同，但是，从整体上说，数学美既不是虚无飘渺、忽有忽无的东西，也不是纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有其确定的客观内容。另外，由实例的考察我们又可看出，对于数学美的自觉追求的确在一定程度上促进了数学的发展。总之，我们就可以把对于数学美的自觉追求作为数学研究的指导性方针。这就是所谓的"审美直觉选择性原则"。

（4）数学抽象思维不完全性原则

与上述内容相比，"数学抽象思维不完全性原则"可以说代表了一种更高层次上的思考，因为这事实上是从总体上指明了数学思维的局限性——从而，如果借助数学基础研究中关于"数学"和"元数学"的区分，我们也就可以把这种研究称为"元数学方法论"的研究。

具体地说，数学中悖论的发现也可被看成数学抽象思维局限性的具体表现；另外，著名的哥德尔不完备性定理等局限性定理则从理论上为此提供了进一步的论据。（详见徐利治、郑毓信:《数学模式论》，广西教育出版社，1993）

（5）算法化原则

对于算法的强调不仅可以被看成计算机技术迅速发展的一个必然结果，而且也应被看成数学思维的一个重要特点，因为一种新的重要算法的形成往往就标志着数学的重要进步；而又正是通过将部分问题的求解归结为对于现成算法的"机械应用"，人们才有可能进一步地去从事新的创造性工作。正如著名数学家、数学教育家弗赖登特尔所指出的，"任何熔岩终将凝固，任何思辨的新生事物都在其自身中包含着算法的萌芽，这是数学的特点。……算法化意味着巩固，意味着由一个平台向更高点的跳跃"。因此，算法的掌握也就应当被看成数学学习的一项重要内容。另外，从数学方法论的角度看，我们则又应当明确地提出相应的方法论原则，这就是所谓的"算法化原则"。（详见徐利治、郑毓信，"算法化原则与数学教育"，载《数学传播》[台湾]，1997年第三期）⑭

除了以徐利治教授为首的研究集体外，其他一些学者也在数学方法论的领域内作出了不少有意义的工作。例如，由解恩泽和徐本顺合著的《数学思想方法》（山东教育出版社，1989）就体现了另一种更为广泛的研究思路（或研究方向）。

具体地说，就"数学思想方法的研究对象与范围"而言，《数学思想方法》共列举了以下十个方面的内容：数学思想方法的历史演进；数学的思维方式与数学研究基本方法；数学家的思想方法；数学学派的思想方法；数学的潜形态及其向显形态转化的机制；数学与其他学科相互渗透的思想方法基础；数学学科的特点；数学内容的辩

⑭ 除去已提及的各部论著，对于上述工作还可见徐利治，《数学方法论选讲》，华中理工大学出版社，2000第三版；徐利治，《徐利治谈数学方法学》，山东教育出版社，2001；郑毓信，《数学方法论》，广西教育出版社，2001第二版。

证性质；数学理论产生发展的动力及其规律性；数学的功能。

容易看出，如果作出关于“宏观的数学方法论”与“微观的数学方法论”的如下区分：前者是指关于数学发展规律的研究，后者则是指关于数学思想方法以及数学中发现、发明和创新等法则的研究，那么以上所列举的部分内容就属于“宏观的数学方法论”的范围。

其次，数学方法论在我国的迅速发展还表现于以下的事实：数学方法论作为一门实践性的学科现已渗透到了各级的数学教学活动之中，并对实际的数学活动（包括数学研究和数学教学）产生了十分积极的影响。例如，“数学方法论”已被纳入到了师范院校数学系的课程之中，一些综合性大学也先后开设了数学方法论的选修课程或专题讲座，全国并有不少院校招有这一方向上的硕士研究生；另外，一些处在教学第一线的数学教师也积极从事了以数学方法论指导数学教学的研究和实践，并取得了一些初步的成果（详见第7章）；最后，也正由于数学方法论对数学教育的改革产生了如此重要的影响，因此，在对20世纪80年代我国的数学教育进行总结时，就有学者把数学方法论与数学教育理论研究和奥林匹克数学竞赛等一起看成促进数学教育深入发展的三个最为重要的动力因素。

显然，如果说数学方法论的理论研究代表了纵向的发展，即是达到了更大的深度，那么，上述的实践性工作就可说是一种横向的发展，即是达到了更大的广度，在两者之间并存在有相互促进、互相制约的辩证关系。

综上所述，自20世纪80年代以来，数学方法论在我国得到了迅速的发展，不仅形成了相对独立的研究领域，而且取得了一系列重要的研究成果，更对实际的数学活动产生了十分重要的影响。

当然，在作出上述肯定的同时，我们又应看到，数学方法论的理论体系还不能说已经得到了建立，另外，现行的研究工作也存在一定的问题或不足之处，从而，为了促进数学方法论的深入发展，我们就必须作出新的努力，特别是，我们既应对已有的工作作出认真的总结和反思，同时则又应当十分关注国外的相关工作并从中吸取有益的成分。在本章的第二节中我们就将对后一主题作出具体论述；以下则将首先围绕数学方法论研究的合理定位对国内的相关工作作出必要的反思与总结。

二、数学方法论研究的合理定位

以下就围绕数学思想方法与数学思想、数学思维研究与数学方法论、数学方法论的理论研究与实际数学活动、数学方法论与数学哲学等概念，对数学方法论的研究对象、研究方法与研究意义等作出进一步的分析。

数学思想方法与数学思想 由于数学方法论（更为准确地说，应是“微观的数学方法论”）在很大程度上可被说成对于数学思想（维）方法的研究，因此，数学方法论

的研究与“数学思想方法”这一概念就是不可完全分割的。与此相对照，“数学思想”这一概念在现今应当说在数学教育界中也得到了十分广泛的应用，对此由以下一些著作的名称就可清楚地看出：克莱因的《古今数学思想》（上海科学技术出版社，1979），张奠宙等的《现代数学思想讲话》（江苏教育出版社，1991），袁小明的《数学思想史导论》（广西教育出版社，1991），等等。

然而，究竟什么是“数学思想”？“数学思想”与“数学思想方法”这两者之间又存在怎样的联系和区别？作为深入开展数学方法论研究的一个必要前提，在此显然有必要对此作出进一步的分析。

笔者以为，对于“数学思想”与各种相关的研究，我们可以作出如下的具体分析：

首先，“数学思想”的第一种意义是在与“具体数学知识内容”（特别是就其最终的、严格的表述形式而言）相对立的意义上得到了应用，即对于数学研究活动中的思维活动与思维活动的最终产物这两者作出了明确的区分。例如，某一研究问题是如何产生的？数学家们又是如何创立了某一新的理论或方法？

应当强调的是，尽管这里所说的数学思想不同于相应的知识内容，但在这两者之间又存在密切的联系，特别是数学思想并不具有普遍的意义——正因如此，我们就可以说，第一种意义上的数学思想的一个重要特征是其从属于具体的数学知识。

对于第一种意义上的数学思想，我们并可从一些不同的角度去进行研究。

第一，从历史的角度进行研究。例如，克莱因的《古今数学思想》，亚历山大洛夫等人的《数学——它的内容、方法和意义》等，就可作为这方面的典型例子。

显然，与一般的数学史研究相比，这种研究的特点就在于：与具体的史实相比，后者更加重视相关的思想。

第二，有针对性地进行论述，特别是，集中地对现代数学思想进行论述。例如，米山国藏在《数学的精神、思想和方法》中所提及的以下十个思想主要地就可被看成属于这一范围：数学的本质在于自由、传统与进步的关系、极限思想、公理化思想、集合与群的思想、其他新思想、高维空间的思想、超穷数的思想、数学家头脑中的空间、数学的神秘性和数学的美。

再例如，张奠宙等的《现代数学思想讲话》则集中地指明了现代数学发展中一些新的、特别重要的思想；特别是，书中还具体地提及了“中学数学的十五个重要的数学思想”。

其次，“数学思想”的第二种意义则是指与具体数学知识内容相分离，并具有更大的普遍意义的思维模式或原则。

数学家们通常是如何去确定自己的研究方向的？他们在解决问题的过程中又常常采用哪些解题策略？

由于第二种意义上的数学思想具有更强的方法论意义，因此就可特称为“数学思想方法”（或“数学思维方法”）；又由于所说的数学思想方法不再从属于任一特定

的数学分支，因此，这就构成了一个新的分支——数学方法论的研究对象。

综上所述，我们就不应把“数学思想方法”混同于第一种意义上的“数学思想”。进而，按照这样的理解，“数学思想方法”显然也不应被简单地理解成“数学思想”与“数学方法”(以及“数学手段”)的简单综合。

数学思维研究与数学方法论 如上所述，数学方法论在很大程度上可被看成关于数学思想(维)方法的研究，那么，这种方法论的研究与一般的数学思维研究相比，又有什么特殊性呢？或者说，我们是否就可将“数学方法论”简单地等同于“数学思维论”？

作为上述问题的具体解答，笔者以为，我们在此首先应肯定：数学方法论作为数学思维方法的研究，无疑应当被看成属于数学思维研究的范围；但是，后者同时又包括了更多的内容，因为，作为数学思维更为系统和全面的研究，除思维方法或模式外，数学思维的内容(材料、结果)、形式、品质和过程等显然也都应当被看成“数学思维论”的重要成分。另外，同样重要的是，如果说数学思维研究主要地应被看成一种描述性的工作，即如何能够真实地去反映实际的数学思维活动，那么，数学方法论中关于数学思维方法的研究则就显然具有很强的规范性质，其主要目标就是帮助人们学会数学地思维，或者说，如何能够按照数学家的思维模式去进行思维(对此在以下还将作出进一步的分析)。

因而，数学方法论与数学思维的研究无论就其具体内容或是基本目标而言都存在有十分重要的区别。

在此，我们还可对国内在数学思维研究这一方面所已完成的一些工作作一简单评析。

从笔者接触到的一些论著看，现行的数学思维研究往往以一般的思维研究作为直接的基础，特别是，种种所谓的“数学思维论”其基本理论框架往往就是从一般的思维研究中直接借用过来的。

例如，一些“数学思维论”的论著往往就以“什么是思维”这一问题作为全书的直接出发点，也即是以此为基础作出了关于“什么是数学思维”的具体论述。在论及数学思维的基本形式时，这些著作又往往采取了“概念—判断—推理”这一基本的分析模式(特殊地，对于所说的“推理”则又往往突出地强调了关于“逻辑推理”与“非逻辑推理”的进一步区分)。再者，在论及数学思维的方法时，这些论著又往往会不厌其烦地对各种一般的思维方法作出详尽的讨论，即如分析与综合，归纳与演绎，抽象与概括，类比与联想，比较与分类，等等(有的著作甚至还涉及观察和实验，但后者显然不能看作一种思维方法)。因此，总的来说，这事实上也就可以被看作一般的思维研究的影响，即逐一地论及数学思维的内容、形式、品质、方法和过程等等，而这也正是一般思维研究中所普遍采用的一个基本框架。

应当指出，在从事数学思维的研究时，我们当然应充分利用一般思维研究的积

极成果；另外，这也正是科学哲学与认知心理学现代研究的一个重要结论，即任何较为深入的认识活动都必然地会受到各种相关理论的一定影响。从这样的角度去分析，一般思维研究对于数学思维研究的影响也就是不可避免的。但是，笔者以为，无论就数学思维论或是数学方法论而言，又都不应成为一般思维理论或一般方法理论在数学中的简单应用或直接推广；恰恰相反，这些理论如有其单独存在的必要，就不应只是在相应的一般性理论框架中简单地去嵌入若干数学的例子。

与上述的做法相对照，笔者以为，为了建立数学思维论或数学方法论的科学理论，我们必须立足于实际的数学活动（包括数学研究与数学教学），而不应满足于对于一般性思维理论或方法理论的简单移植。值得指出的是，后者事实上也就是数学教育心理学国际研究组织（PME）在应当如何去从事数学学习心理学研究这一问题上的一个基本主张，即我们不应从普遍的、中性的学习理论出发去建立数学学习理论，而应集中于特定内容的学习过程。

显然，从这种立场出发，在数学思维论或数学方法论的相关论著中，我们就不应花费很大的力量去从事一般性概念或原则的讨论。例如，作为一部数学方法论的专著，就未必一定要首先去论及“什么是方法论。”另外，我们也无须具体地论及各种与数学思维模式和方法的研究并无直接关系的论题，特别是，不应详细地去论及那些较为专门的理论性问题，即如关于直感和直觉、想像与直觉的区分和联系，等等。

值得一提的是，研究方法的选用事实上也在很大程度上反映了研究者的主要目标。例如，如果我们所希望的只是很快地建立起某种貌似“面面俱到”的“宏大理论”，而完全不顾及这种“理论研究”是否具有任何真正的意义，那么上述的“简单移植”的方法显然就十分适用，特别是，我们在此更可完全局限于纯粹的逻辑分析，而完全不用顾及实际的数学活动。例如，为了“创立”关于数学概念的一个“系统理论”（“数学概念论”），我们就可逐一地论及数学概念的分类、关系和定义方法等，如概念可以分为单独概念和普遍概念、种概念和属概念、组合概念和个体概念、抽象概念和具体概念、相对概念和绝对概念等；概念间的关系则又可以分为同一关系、主从关系、交叉关系、并列关系、对立关系、矛盾关系等；……同时则又完全不用顾及这种分析对于实际的数学活动（包括数学教学和学习）究竟有多大的意义，也完全不用考虑所说的研究是否如实地反映了实际数学活动中概念的生成和应用，特别是这种研究是否正确地反映了数学抽象活动的特殊性。

但是，如果我们认为数学思维论和数学方法论的研究必须突出数学思维的特殊性，并坚持为实际的数学活动、特别是数学教育服务这样一个基本目标，那么，上述的“简单移植”的做法显然就不可取了。恰恰相反，我们必须切实立足于实际的数学活动。

以下我们将通过国内外相关研究的比较，对数学方法论与数学思维研究、特别是数学学习心理学研究的关系作出进一步的分析。

数学方法论的理论研究与实际数学活动 作为立足于实际数学活动的一个重要方面，在数学方法论的研究中，我们显然应十分重视各个数学家的思想方法的分析，因为正是他们的实际工作，为数学方法论的理论研究提供了必要的基础。也正是在这样的意义上，笔者以为，与关于数学方法论的抽象论述相比，以下的工作就应被赋予更大的重要性，即如何能够联系数学研究的实际事例、特别是著名数学家的研究工作，对相关的数学方法论原则作出具体的、生动的说明。值得指出的是，这也正是心理学与科学哲学现代研究的一个重要结论，即人们主要地就是通过范例来学习的。从而，也就只有通过数学研究中的各个具体事例，我们才能获得关于各个方法论原则的深刻体验，并使之真正成为“可以理解的”“可以学到手的”和“能够加以推广应用的”。

当然，在作出上述肯定的同时，我们又应看到，作为数学思想方法的理论研究，我们不应停留于对于各个数学家思想方法的简单复述或必要总结，而还应从理论高度对此作出进一步的分析，特别是应清楚地指明各种思想方法的普遍意义。因为，只有这样，一个由实例抽象而出的方法才能真正成为一般性的“思维模式”，从而也才有可能被成功地应用于各种新的场合。事实上，我们也根本不可能亦步亦趋地去重复各个数学家的真实思想活动，毋宁说，这正是数学方法论研究的一个主要目标，即如何能够很好地实现对于真实思维过程的“理性重建”（对此我们将在第7章中作出具体论述）。因而，“普遍性”（和“深刻性”）就应被看成方法论原则最为重要的一个特征，也就是说，数学方法论的研究对象应是各种具有普遍意义的数学思想方法或模式。

显然，按照这样的理解，我们就不仅应对所说的数学思想方法与各个数学分支中的各种具体数学方法（即如微积分学中的极限方法、集合论中的力迫法等）作出明确的区分，而且也应明确反对沉溺于各种并不具有普遍意义的“奇招怪招”。

其次，除了所说的具体性与普遍性的辩证关系以外，笔者以为，在数学方法论的理论研究中，我们又应十分重视局部与整体的关系。也就是说，数学方法论不应被等同于各种方法论原则的简单罗列；恰恰相反，我们应十分重视如何能从整体上对这些方法论原则作出进一步的分析与必要的综合。

具体地说，我们在此首先应清楚地看到各种思想方法的局限性和相对性：无论就具体的研究方法，或是就一般的思想方法而言，每种数学方法显然都具有自己的特殊性质，并都具有一定的适用范围。从而，在数学方法论的学习和研究中，我们就应首先弄清各种方法的特殊性和局限性。

例如，在第5章中我们已对康托所创立的“对角线方法”进行了介绍。以下就可被看成这一方法的主要特点：第一，用对角线方法可以构造出一个不属于原来集合的“新”元素。从而，从无限的角度看，这就是一种“超越”原来的层次，并达到新的、更高层次的有效方法。第二，正因为对角线方法具有上述特性，因此就可以在两个

不同的方向得到应用:我们既可以用它来证明某个集合的“不可穷竭性”(例如,康托关于实数集“不可数性”的证明就是这方面的一个具体例子),也可以用它来对原来的集合实行新的扩张(这就是“康托定理”的实质所在)。

正因为各种数学方法或方法论原则都具有特定的适用范围,在数学方法论的研究中我们就不应片面地去夸大任何一种方法或方法论原则的作用,更不应去追求所谓的“万能的方法”;恰恰相反,我们应清楚地认识各种方法的局限性(相对性)。

例如,在很长的时期内,人们始终存在这样的信念:即使在当前尚未获得成功,但从长远的角度看,我们总归可以将任何一个数学理论(如自然数理论、几何理论等)组织成一个相容的、完备的公理系统。然而,这种观点现已被证明是错误的,因为这正是哥德尔不完备性定理的主要内容:对于任一足够丰富的数学理论来说,如果所建立的公理(形式)系统是相容的,它就一定是不完备的。从而,在充分肯定公理化方法的作用的同时,我们也就应当清楚地看到它的局限性(特别是我们更不能企图以形式的研究来完全取代内容的分析)。

再者,相对于各个数学方法或方法论原则的特殊性和局限性而言,我们又应更为清楚地强调各种方法或方法论原则的互补性以及数学方法的整合性质。

具体地说,尽管各种数学方法都具有自己的特殊性;但是,从整体上说,数学方法又表现出了明显的对偶性:各种数学方法往往都处于方向相反、作用不同的对立状态之中,而且,这些互为对偶的方法在实际的数学研究中又往往是相互依赖、互为作用的。显然,清楚地认识到了数学方法的这种对偶性,也就有助于我们克服各个方法的局限性。

例如,正如前面所提及的,在直觉与逻辑之间就存在有既互相对立、又相互作用的辩证关系。因此,在实际的数学研究中,我们就应同时注意逻辑思维与直觉能力的综合应用。例如,在解决某一问题时,如果存在有多种可能的途径,我们就应充分发挥直觉的“选择”作用。正如波利亚所指出的:“任何认真考虑过他的问题的人对于解的接近程度和问题进展的步子都会有一种明确的感觉。……比如:‘这样做是对的,解可能就在这附近’,或者‘这样太慢了,解还是离得很远’,或者‘我卡住了,一点没有进展’,或者‘我正在偏离问题的解’等等”。当然,作为问题的另一方面,我们又不应盲目地去信任直觉。从而,这也就如波利亚所指出的,“决不要做违反你的感觉的事,但也应不带任何偏见地去查看那些支持或反对你的计划的种种说得清楚的理由”。

对于数学方法或方法论原则互补性质的清楚认识,显然也可被看成人们明确提出如下一些基本原则的直接基础,如“现实背景与形式模型互相统一的原则”,“解题技巧与程序训练相结合的原则”,等等。(详见张奠宙等,《数学教育学》,江西教育出版社,1991)

除了上述的互补性以外,数学方法在总体上说又表现出了明显的综合性。也就

是说，实际的数学研究不仅包括了互为对偶的方法的相互补充，而且也包括了多种不同方法的综合应用。

对于数学方法的这种综合性，有不少数学家也曾给予了明确的强调。例如，著名数学家R.柯朗和H.罗布尼斯就曾指出："数学的基本成分是逻辑与直觉、分析与综合、一般与特殊。尽管不同的传统可能强调不同的侧面，但是，只有这些对立面的相互作用，以及为了这些对立面的结合而进行的努力，才构成了数学的生命、可应用性和最高的价值。"因此，在数学方法论的学习和研究中，我们不仅应十分重视各种具体的数学方法或方法论原则，而且更应注意培养综合应用的能力。

最后，数学方法的层次性显然又可被看成最为清楚地表明了数学方法论的整合性质与数学方法或方法论原则的统一性：数学方法论并不是各种互不相关的方法或方法论原则的杂乱组合，而是一个具有一定层次结构的有机整体——特殊地，后者事实上也就应当被看成数学方法论科学理论体系的一个主要特征。

我们在此可对数学方法的层次性作出如下的大致描述：处于最底层的是各个数学分支中的特殊方法，较高层次的则是若干个数学分支中所使用的共同方法，……另外，除去这种纵向的层次区分以外，也还存在重要的横向联系。例如，一般的思想方法事实上就起着这样的联系作用，后者并就构成了数学方法论研究的主要对象。

由于数学方法论是一门新兴学科，因此，要想详细地勾画出数学方法论的整体结构就为时过早；但是，这显然又应被看成深入开展数学方法论研究的一个基本目标。

数学方法论与数学哲学　首先，作为数学的哲学分析，数学哲学必定具有一定的方法论意义，特别是我们更应清楚地看到数学观的现代演变对于数学方法论研究的重要意义。

具体地说，这正是数学哲学现代发展的一个主要特征，即基本的数学观已经由静态的、绝对主义的数学观转移到了动态的、经验和拟经验的数学观。也就是说，数学不应被简单地等同于数学知识的汇集，而应看成人类的一种创造性活动；正因如此，数学的发展就并非无可怀疑的真理在数量上的简单积累，而是一个包含有猜测、错误和尝试、证明和反驳、检验与改进的复杂过程。

显然，从这样的立场去分析，我们就不应惟一地着眼于作为数学活动"最终"产物的事实性结论(包括公式等)，而应采取"过程与结果并重"的态度，特别是，数学更应被看成一个由"语言""方法""问题""命题"等多种成分所组成的复合体(这正是"数学活动论"的主要内容，详见郑毓信，《数学方法论》，广西教育出版社，1991)。特殊地，对于"方法"在数学中基本地位的确认，显然也就更为清楚地表明了数学方法论研究的重要性。

其次，作为数学活动的具体分析，我们又应清楚地看到这种活动的社会性质：在现代社会中，每个数学家，无论其自觉与否，总是作为相应社会共同体("数学共同

体”)的一员从事自己的研究活动的,即必定处在一定的数学传统之中。从而,作为“数学活动”具体内涵的进一步分析,我们也就应当把所说的“数学传统”(或者说,“数学的观念成分”)包括在内(由于数学方法论事实上也可被看成属于“数学的观念成分”,因此,这一分析也就更为清楚地表明了数学方法论原则的客观性及其积极意义)。

应当强调的是,动态的数学观事实上也为深入开展数学方法论的研究开拓了一个新的领域:我们应当由“微观的数学方法论”扩展到“宏观的数学方法论”,即应当对数学的发展规律作出深入的研究。当然,后一方面的工作也不能停留于历史事实的简单列举和归纳,而应从理论的高度对此作出深入的分析。例如,在笔者看来,这就是数学历史发展的一个重要规律,即数学的无限发展正是在诸多因素的辩证运动中实现的,或者说,正是各个对立面的辩证运动为数学的发展提供了必要的内在机制(详见郑毓信、李国伟,《数学哲学中的革命》,九章出版社[台湾],1999)。显然,这事实上也就可以被看成数学哲学与数学方法论研究的一个交汇点。

最后,正确的哲学思想为我们深入从事数学方法论的研究提供了重要的思想武器。例如,以上所论及的数学方法的互补性和整合性显然就已十分清楚地表明了数学方法的辩证性质。对此,一些数学家也已清楚地认识到。例如,波利亚就曾利用动员与组织、辨认与回忆、补充与重新组合、分割与结合这样几组概念对数学发现的思维过程进行了描述。他强调指出:“这几组概念中的两个侧面都是互相对立,又是互相补充、互相依赖的,另外,在各组概念之间也存在有互相补充、互相依赖的关系,从而就在一定程度上清楚地揭示了数学认识活动的辩证性质。”由于波利亚等人正是通过数学实践得出这样的认识的,因此这就不是空洞的教条,而是具体地渗透到了数学与数学方法论的研究工作中;但是,又由于这些认识在很大程度上只是辩证思维的自发应用,而并非自觉的应用,因此,这些认识往往也具有一定的局限性。这事实上也就从另一角度更为清楚表明理论思维对于数学方法论研究的特殊重要性。也就是说,深入开展数学方法论研究的一个关键因素,是应当自觉地去坚持和运用唯物辩证法,特别是,只有切实做到了这样一点,我们才有可能发展起具有中国特色的数学方法论,从而也将真正有益于我国的数学研究更快地赶上和超越世界先进水平。

为了更清楚地说明问题,在此还可对数学方法的局限性和无限发展性质作出进一步的分析。正如前面所提及的,任何一种方法或方法论原则都不是万能的,必然有其特定的适用范围。另外,又由于数学研究是一种十分复杂、高度能动的创造性活动,特别是,其中必定包含有一定的非理性成分和个体的特殊性,因此,这就不可能被完全纳入任何一个固定的方法论框架;恰恰相反,我们应清楚地看到数学思想方法具有无限的发展可能性。例如,新的数学对象的引进与新的数学理论的建立必然要求我们积极地去创建新的研究方法。另外,随着数学的发展,已有的方法也可

能获得更为广泛的应用和新的发展；而作为客观世界量性规律的认识和反映，客观世界在广度和深度上的无限性显然也就直接决定了数学以及数学方法论具有无限的发展可能性。

因此，我们不能用静止的观点去看待数学方法论，而应积极地发展和创造新的方法；另外，同样重要的是，在明确肯定数学方法论的积极意义的同时，我们也不应盲目地追求任何一种绝对的统一性，如按照某种统一的模式强制地去规范人们的思维。（也正是基于这样的意义，数学方法论不应被看成纯粹的规范性研究，毋宁说，我们在此应切实防止任何一种过强的规范性。对此可见以下的论述。）

最后，在充分肯定数学方法论与数学哲学的重要联系、特别是数学哲学对于数学方法论研究的积极意义的同时，我们显然又应防止将两者简单地等同起来。特别是，由于数学方法论与数学哲学各有其特殊的研究问题和研究重点，因此，我们就不应把数学哲学的内容直接纳入到数学方法论之中。例如，在笔者看来，前面所提及的《数学思想方法》一书中所列举的若干内容，如关于数学的性质、特征和作用的分析，以及数学内容的辩证性质等，就都应归属于数学哲学、而不是数学方法论的研究范围。

结束语 依据以上的分析，我们可总结出以下几条关于如何深入开展数学方法论研究的指导性原则：

第一，思维总是按照一定的模式进行的，特殊地，数学更具有本身特殊的思维模式，这就是数学方法论的研究对象。

第二，数学方法论是一门实践性的学科，因此，我们就不仅应当十分重视数学方法论的理论研究，而且也应高度关注如何更好地去发挥数学方法论对于实际数学活动的促进作用，并应努力做到理论与实践的密切结合。从数学方法论的理论建设这一角度看，我们既应避免将数学方法论变成一门借题发挥、夸夸其谈的空洞“学问”，又应善于从理论的高度去对已有的实践活动作出总结。

第三，数学方法论研究的一个重要途径是通过典型例子的分析引出具有普遍意义的思想方法或模式。由于个人的实践活动必定是有限的，因此，从事数学方法论研究的一个重要途径就是努力加强数学史、数学经典著作的学习。可以这样说，没有数学史的数学方法论必定是空洞的。另外，在数学方法论的实际研究中，我们又应大力提倡数学方法论的研究者与数学工作者、数学史学家的密切合作。

第四，数学方法论由于其本身的特殊性质，必然与数学的哲学分析有着直接的联系，因此，每个数学方法论工作者都应努力提高自己的哲学素养，特别是应当了解数学哲学的一般内容。但是，我们又应避免用哲学的分析去取代数学方法论的具体研究，而应当用正确的哲学思维去指导、促进数学方法论的研究。所以，我们应当大力提倡数学方法论研究者与哲学工作者的密切合作。

第二节　国外的相关研究

以下再对国际上的相关研究作简要的介绍。

一、波利亚的贡献

传统的"两极对立"　历史上，人们曾从各种不同的角度对思维、特别是创造性思维进行了研究。例如，在哲学、心理学、逻辑学和教育学等学科中我们都可找到这方面的内容。特殊地，我们在此显然又应特别注意心理学和逻辑学的相关研究，因为，思维活动即可说是构成了心理学和逻辑学研究的基本内容。

然而，应当强调的是，在心理学与逻辑学的相关研究之间又存在重要的区别，特别是两者所采取的基本立场可以说是互相对立的。

具体地说，正如前面所提及的，心理学的研究在很大程度上是一种描述性的研究，即希望能真实地反映人们的心理活动，包括感觉、知觉、记忆、思维、情感、性格、能力等。例如，曾在心理学领域中长期占据主导地位的行为主义学派在心理学研究中所采取的基本立场在很大程度上就可被看成这种描述性立场的一个直接反映：由于内在的思维活动是不可直接感知的，因此，在行为主义者看来，心理学的研究就应局限于外部的可见行为，而不应涉及任何内在的思维活动。

与心理学的研究不同，逻辑学所从事的则并非是一种描述性的工作，而主要是一种规范性的研究，因为后者惟一关注的是思维的合理性，包括概念的清晰性、推理的有效性(可靠性)、理论的相容性，等等。应当指明的是，尽管从历史的角度看逻辑学曾经历了由传统逻辑(形式逻辑)到数理逻辑的重要发展，但其又始终保持了所说的规范性质，即主要集中于我们应当如何去保证思维(特别是推理)的合理性(有效性)。

正因为心理学和逻辑学中关于思维的研究所采取的是相互对立的两种立场，我们在此自然也就应当考虑这样的问题：数学方法论究竟是一种什么样的研究？特殊地，在数学方法论与心理学和逻辑学的相应研究之间又存在什么样的关系？

波利亚的贡献　关于思维合理性的研究显然十分必要，特别是，由于数学对象并非经验世界中的真实存在，而只是抽象思维的产物，因此，在数学的研究活动中，我们就应特别注意思维活动的合理性。例如，这事实上就是逻辑证明何以在数学研究中占有特别重要位置的一个重要原因。另外，也正是从这样的角度出发，我们显然又应高度重视理论在整体上的一致性，这就是理论的相容性。

但是，在此需要强调的是，从创造性思维的角度看，逻辑的研究显然又有着明显

的局限性，因为，由上述的基本立场即可看出，逻辑的研究主要是一种静态的研究，即只是指明了应当如何去判定某种思维形式是否合理，而完全没有涉及相应的思想是如何产生的。同样地，它也只是指明了什么样的推理形式是可靠的，但却没有能够表明这些推理活动会把思维引向何处。从而，就如彭加勒所指出的，“纯粹解析把许多程序提供给我们使用，它保证这些程序是确实可靠的；它为我们开辟了成千条不同的大道，我们可以满怀信心地迈步在这些大道上；我们确信不会遇到任何障碍。但是，在所有这些道路中，哪一条会最迅速地把我们引向目标呢?”“逻辑告诉我们走这一条路保证不会遇到任何障碍；但是它不会告诉我们哪一条路能达到目的。”最后，又如前面所已提及的，由于创造性的思维活动必然包含有非理性的成分，如直觉、无意识思维活动等，从而就不可能被完全纳入逻辑法则的框架之中。

综上所述，数学方法论的研究不应满足于直接搬弄逻辑学的研究成果，更不能局限于纯粹逻辑的范围。也就是说，数学方法论如有其独立存在的必要，就应超出纯粹逻辑的范围而具有自己的特殊内容。

更为一般地说，我们应明确反对把方法论原则看成某种必须严格遵循的硬性规范。回顾人类的历史，我们可以看到人们在后一方向上所作出的不少努力，但是所有这些努力最终又都未能逃脱失败的命运。具体地说，在人类文明(更为正确地说，即是西方文明)的发展进展中，曾有过这样一个时期，其间人们曾希望能够找到这样一种方法，用之即可有效地解决一切问题，或有效地从事发明和创造。显然，如果这种“万能方法”确实存在的话，这就为人们的思维训练提供了最高的规范。但是，就像不存在可以把万物点化为黄金的“哲人之石”，能有效地解决一切问题或从事创造性思维活动的“万能方法”也是不存在的。这样，所有这些追求“万能方法”(或者说，“最高规范”)的努力就都没有能逃脱失败的命运。

由于人们往往习惯于“两极对立”的思维方式，因此，作为上述方向上努力的失败的一个直接结果，在西方文明史上出现以下现象也就无足为奇了，即人们曾一度由“规范性”的研究转向了完全的“描述性”，即认为创造发明的问题应当被看成完全属于心理学的研究范围，对此我们不可能作出任何理性的分析，从而也就根本不存在任何真正意义上的“创造的方法”。显然，如果坚持这样的立场，方法论的研究也就被完全取消了。

正是在上述的“严峻”形势下，美籍匈牙利数学家、数学教育家波利亚自觉地承担起了“复兴”数学启发法的重任——按照波利亚的解释，所谓启发法就是指“关于发现与发明的方法和规律”的研究。波利亚在这一问题上的基本立场是：尽管所谓的“万能方法”是不存在的，但是，“各种各样的规则还是有的，诸如行为准则、格言、指南等等。这些都还是有用的。”特别是，我们可以而且应当由已有的成功实践总结出一般的方法或模式。尽管后者并不能被看成新的活动所必须严格遵循的硬性规范，但是，这些方法或模式在以后的类似情况下，还是可以起到重要的启发与指导作

用。由此可见，由波利亚所开创的数学启发法研究事实上就是在上述的“描述性”与“规范性”的两极对立之间开拓了第三种可能性，并为数学方法论的现代研究指明了努力的方向：数学方法论是一种启发性的研究，既不同于纯粹的规范性研究，也不同于纯粹的描述性工作。

因而，尽管方法论的研究应当立足于对于真实思维活动的深入考察；但是，这又并非一种纯粹的描述性工作，而应致力于如何能由成功实例的分析引出普遍性的思维方法或模式，从而就能在新的实践活动中给人以一定的启发。正因如此，在方法论的研究中，人们通常就并不十分关心有关的实例是否符合历史的本来面貌，毋宁说，我们在此更为重视的即是历史事实的“理性重建”，即希望能通过方法论的“重建”使得相应的思维活动成为“可以理解的”“可以学到手的”和“能够加以推广应用的”。

另外，作为启发性的研究，数学方法论中所给出的各种思维方法或模式也不是一些必须严格遵循的硬性规范。例如，就“启发性解题策略”在解题活动中的应用而言，一个基本的指导思想就是：如果解题者对于如何求解所面临的问题有着明确的想法，就完全可以按照自己的想法去行事，而不用顾及任何方法论的建议。更为一般地说，这也就是指，我们应当明确反对按照任何一种统一的模式强制地去规范人们的思维，毋宁说，以下即应被看成创造性思维的本质所在：“以正合，以奇胜。”也就是说，我们既应通过数学方法论的学习和研究学会数学地思维，但这又应当被看成数学方法论的学习和运用的一个更高境界，即能依据具体的情境（以及自己的个性特征）创造性地运用各种方法论原则，包括在数学方法上作出新的创造。

综上所述，数学方法论应被看作启发性的研究。

二、“问题解决”的现代研究

正是波利亚为数学方法论的现代研究指明了努力的方向，或者说清楚地指明了数学方法论研究的基本性质，因此，在这样的意义上，波利亚关于数学启发法的研究也就可被说成为数学方法论的现代研究奠定了必要的基础。

具体地说，波利亚关于数学启发法的研究主要是围绕“怎样解题”这样一个主题展开的。以下就是波利亚在这一方面的一些主要著作：《怎样解题》（科学出版社，1982），《数学的发现》（内蒙古人民出版社，1980），《数学与猜想》（科学出版社，1984年）。（对于波利亚上述工作的概述可详见郑毓信，《数学方法论》，广西教育出版社，2001，第一章）从历史的角度看，这些工作就构成了国内外在上述方向上进一步工作的直接出发点。但是，由于自波利亚的上述著作问世以来已经约有半个世纪过去了，因此，在充分肯定波利亚的贡献的同时，我们显然又应考虑这样的问题：什么是国际范围内自波利亚以来在这一方面所取得的主要进展？或者说，在这一领域中，

是否自波利亚以后并无任何重要的进步，以致今天在数学方法论的领域中我们仍然言之必称波利亚？

毋庸置疑，科学的发展不会始终停留于某一特定的水平。因此，在从事数学方法论的研究时，我们也就应当自觉地去采取这样一种基本立场：我们既应高度重视对于波利亚数学启发法的学习和继承，同时又应积极地去开展新的研究，从而真正做到对于波利亚的“超越”。

事实上，前面所介绍的国内关于数学方法论的研究在一定程度上就可被看成上述方向的一些具体工作；那么，什么又是波利亚以后国际上在数学启发法研究方面的最重要进展呢？以下就围绕“问题解决”这一主题对此作出简要的介绍。

具体地说，正如人们已普遍了解的，“问题解决”是20世纪80年代国际数学教育界的一个主要口号，即认为应当以“问题解决作为学校数学教育的中心”。特殊地，“对于波利亚的重新发现”就可被看成这一改革运动的一个直接的出发点；另外，更为重要的是，又正是通过理论研究与数学教学实践的密切结合，人们才逐步实现了对于波利亚的“超越”。特别是，如果说波利亚在这一方面的工作主要集中于“解题策略”，那么，关于“问题解决”的现代研究就已超出后一范围而包括了更多的因素，事实上这也就为“问题解决”提供了一个新的理论框架。

曲折的前进 尽管波利亚的数学启发法研究已经为进一步的工作打下了良好基础，波利亚的有关论著也曾在世界范围内引起过一定的积极反响；但是，就西方各国、特别是美国而言，关于“问题解决”的研究在很长时间内却一直处于低谷的状态，而只是到了20世纪80年代才又重新获得了人们的普遍重视。这种发展的停滞性在很大程度上是由数学教育的总体发展形势所决定的：在20世纪60年代，在数学教育领域中占据中心地位的是所谓的“新数运动”，其主要特征是对于抽象分析与数学知识内在的逻辑结构的片面强调。由于“新数运动”违背了基本的认识规律，从而造成了数学教育质量的明显下降，因此，这一运动最终就未能逃脱失败的命运。其后，在20世纪70年代，作为对于上述改革运动的一种“反动”，“回到基础”又成了美国数学教育界的主要口号，而其主要特征则是对于基础知识、基本技能的突出强调，并认为只需通过反复的讲授和大量的、机械的练习，就可使学生较好地掌握所说的基础知识和基本技能（正因如此，20世纪70年代有时被形容为“机械练习的十年”）。但是，近十年的实践却又证明这一运动并没有能够达到真正提高数学教育质量的目标，而且，即使就所说的基础知识与基本技能的掌握而言，反复的讲授与大量的练习也未能实现预期的目标。20世纪80年代，人们又提出了“问题解决”这样一个口号，而其实际出发点就是“对于波利亚的重新发现”。例如，美国数学教师全国委员会(NCTM)在1980年出版的一部指导性著作《学校数学中的问题解决》，就重印了波利亚的一篇短文“论中学里的数学解题”作为全书的第一篇文章，而这篇文章事实上却是波利亚在1949年发表的。

特殊地，主要地也就是由于波利亚的影响，就 20 世纪 80 年代初期而言，美国关于“问题解决”的研究主要就集中在对于数学启发法的明确阐述和进一步发挥上，以致“数学启发法……几乎成了问题解决的同义词”。

然而，尽管人们作出了很大的努力，相应的实践、特别是“问题解决”的教学却未能取得预期的效果，人们并可经常可以看到这样的现象：学生已经具备了足够的数学知识，似乎也已掌握了相应的解题策略，但却仍然不能有效地解决问题。

对于上述现象人们采取了不同的态度。例如，一部分人就因此而认定：“启发法的研究和教学是无意义的”，“波利亚的工作已经过时”，等等。这种态度应当说是不够妥当的，因为，更为正确的做法显然应是对所说的“失败”的原因作出具体分析，并由此而作出进一步的深入研究。事实上，对于上述现象人们所给出的分析也不尽相同。例如，一些学者提出，已有的启发法研究和教学只是注意了“问题解决”在方法论上的共同点，但却忽视了解题活动相对于“问题”和“解题者”而言的特殊性。也有一些学者则认为，我们事实上不应对数学启发法的教学抱过高的期望，因为，人们在某一领域中的成功显然取决于众多的因素。与此相对照，以下则是人们经由对已有的实践进行深刻反省所得出的一个普遍结论：即认识到了“问题解决”是一个包含有多个环节的复杂过程，从而，我们的研究就不应惟一地集中于数学启发法，而应过渡到对于数学解题全部过程的深入分析，特别是，即应清楚地揭示那些对于解决问题有着十分重要的影响，但又往往为人们所忽视的环节。

从历史的角度看，正是后一方向上的努力促成了关于“问题解决”的理论研究和教学实践的新的重要发展。从而，在经历了所说的曲折道路以后，人们就终于实现了对于波利亚的“超越”。

需要指明的是，除了来自教学实践的重要促进以外，上述的发展还有着更为广泛的背景。具体地说，这在很大程度上应被看成科学整体发展的一个必然结果，特别是，自 20 世纪 70 年代以来所兴起的认知心理学(科学)与人工智能等方面的研究更可被认为为“问题解决”的现代研究提供了重要的理论背景。例如，这就正如“问题解决”研究在现代的主要代表人物 A. 舍费尔德所指出的：“对于问题解决和相应的数学课程的重新认识……主要建立在过去十年中所取得的一些进展之上：对于思维和学习的性质以及解决问题策略和元认知的更为深入的理解，逐步形成了数学是‘模式的科学’和做数学是一种意义赋予活动的观点，以及关于认知见习和‘学习的文化’”。从而，总的来说，这也就应被看成“问题解决”现代研究的一个重要特点，即是表现出了更大的“开放性”，也即是与其他方面的一些研究密切相关、相互促进的。

一个新的理论框架　就“问题解决”的现代研究而言，我们并应特别提及美国著名数学教育家舍费尔德的如下名著：《数学问题解决》，因为，就如该书“前言”中所明确地指出的，这一著作的主要贡献即是为分析复杂的解题行为提供了一个新的理论框架：“这一框架……描述了复杂的智力活动的四个不同性质的方面：认识的资源，

即解题者所已掌握的事实和算法;启发法,即在困难的情况下借以取得进展的'常识性法则';调节,它所涉及的是解题者运用已有知识的有效性;信念系统,即解题者对于学科的性质和应当如何去从事工作的看法。"

具体地说,如果说所谓的"数学启发法"即可被看成新的研究与波利亚的共同关注,那么,对于以下一些因素的强调则就清楚地表明了这样一点:"问题解决"的研究和教学不应惟一地集中于启发性解题策略,而应过渡到解决问题过程更为全面的分析:

第一,知识的良好组织。这显然应当被看成成功的解题活动的一个必要前提,即解题者必须掌握一定的数学知识(包括数学技能);另外,与单纯的数量相比,我们在此又应更加重视知识的良好组织。

事实上,波利亚即已清楚地认识到了"知识的良好组织"的重要性。波利亚写道:"良好的组织使得所提供的知识易于用上,这甚至可能比知识的广泛更为重要。至少在有些情况下,知识太多可能反而成了累赘,它可能会妨碍解题者去看出一条简单的途径,而良好的组织则有利而无弊。"

例如,以下的研究即就十分清楚地表明了将问题"归类"的重要性:人们在面对新问题时,往往是通过"类型识别"来从事解题活动的,也即是努力将所面临的新问题归结为先前所已掌握的某种"类型",从而即可通过调动头脑中所贮存的关于这类问题的各种知识获得关于如何去求解目前所面临问题的重要启示或必要帮助。

显然,从这样的角度去分析,我们也就可以更好地理解波利亚关于如何去实现知识的良好组织的如下建议:

"我们应当把过去解过的具有相同类型求知量的问题及过去证明过的具有相同结论的定理设法'贮存在一起'。"

"概括一下有关的问题也许能使知识的组织搞得更好一些。除去上述的按求知量(结论)去进行概括以外,我们还可按共同的已知量(条件)或共同的思维模式去进行概括。"

另外,更为重要的是,我们在此又应十分注意关于问题的"表层结构"与"深层结构"的明确区分,这就是说,我们不应按照问题的实际内容(如"工程问题"、"水管问题"、"相遇问题"等)或表述形式(如所谓的"关键词")对问题进行分类,而应注意分析问题的内在数学结构。例如,后者事实上也就可以被看成"应当注意题目的变式"这一主张的真谛之所在。这就是说,"只有经常变换课题的具体情境,在不同的情境中展现同一结构关系,学生才不会被具体情境所迷惑"。

事实上,研究表明,这也正是存在于初学者(学生)与专家(数学家)之间的一个重要区别:学生往往根据问题中所包括的事实内容来进行分类而忽视了内在的数学结构,特殊地,这事实上也就是学生在求解那些其事实内容与内在数学结构不相一致的"非标准问题"时表现出较大困难的一个主要原因;专家则往往是按照解题时所

依据的基本思维模式来对问题进行分类的——因此，事实上我们就应当把解题方法看成是问题的“深层结构”的一个重要内涵。

从后一角度去分析，我们也就可以看出现行数学教材与数学教学中的一个严重问题：在现行的教材和教学中问题往往是按照其数学内容来进行选择和安排的，而对于相应的思维方法、也即方法论方面的考虑却未能给予足够的重视，特别是，尽管数学中确实存在一些在各个数学分支中都有着广泛应用的思维模式，但在整个的数学学习过程中却始终没有能对此作出任何专门的讨论或分析。

第二，元认知（调节）。所谓元认知，在此是指解题者对于自身所从事的解题活动（包括解题策略的选择、整个过程的组织、目前所从事的工作在整个解题过程中作用等）的自我意识、自我分析（包括评估）和自我调整。由于与具体的认知活动（在此指具体的解题活动）相比，所说的考虑显然达到了更高的层次，并就以后者作为直接的对象，因此，在现代的认知心理学研究中常常就称之为“元认知”。

“问题解决”现代研究中对于元认知的强调主要包括以下两个含义：首先，对于自身所从事的解题活动我们应当保持清醒的自我意识。例如：

“我所面临的是怎样的问题？”

“我所选择的是怎样的一条解题途径？”

“我为什么作出这样的选择？”

“我现在已经进行到了哪一阶段？”

“这一步的实施在整个解题过程中占有怎样的地位？”

“我目前所面临的主要困难是什么？”

“解题的前景如何？”……

其次，我们又应清楚地认识到：解决问题并非一个按照事先制定的程序一成不变地去加以实施的机械过程，而是一个需要不断对所发生的情况进行评估并随时作出必要调整的动态过程。例如，以下一些问题就直接关系到对于目前所从事的解题活动的自我评估：

“我是否真正弄清了题意？”特别是，“我对于所面临的困难与成功的可能性是否有清醒的认识？”

“我是否真正‘盯住了目标’？”特别是，“我所采取的解题途径是否足以导致问题的彻底解决或能对此起到很大的促进作用？”

“我所选择的解题途径是否可行？”特别是，“目前所面临的困难是否可以顺利地得到克服？”

“我所选择的解题途径是否是最好的？是否有更好的解题途径？”

“在已完成的工作中是否存在有隐蔽的错误？”特别是，“我有没有重犯先前的‘老毛病’（如计算中的粗心大意等）？”

应当指明，在国际上的许多学者看来，对于元认知的强调正是自波利亚以来在

"问题解决"的理论研究上所取得的最重要进展之一。这一说法是有一定道理的，因为，正如前面所已提及的，自波利亚开始直至20世纪80年代中期，国外关于"问题解决"的研究主要地都集中于数学启发法，而忽视了"元认知"这一对于解题活动的成功性同样有着十分重要影响的因素。特殊地，后者事实上也就是美国在20世纪80年代初期关于"问题解决"的数学教学实践何以没有能够取得显著成效的一个重要原因。

事实上，这也正是关于初学者(不成功的解题者)与专家(好的解题者)的诸多比较研究的一个重要结论，即是清楚地表明了元认知水平的高低正是决定解题活动成功与否的一个重要因素。

具体地说，不成功的解题者所采取的往往是"盲目干"的做法，即其往往不假思索地采取某一方法或解题途径，或总是在各种可能的"解题途径"之间徘徊，而对自己在干什么、特别是为什么要这样干始终缺乏明确的认识。另外，在沿着某一解题途径走下去时，则又往往不能对自己目前的处境作出清醒的评估并由此而作出必要的调整，却只是"一股劲地往前走"，直至最终陷入了僵局而一无所措(后者既是指遇到了不可克服的困难，也是指获得了某种结果但却对于求解原来的问题毫无作用)。

与此相对照，"好的解题者"在这一方面则往往表现出了如下的"良好素质"：在具体地采用某一方法或解题途径前能对各种可能性进行仔细的考虑；在整个解题过程中则能做到"心中有数"，即清楚地知道自己在干什么及为什么要这样干；他们能对目前的处境作出清醒的自我评估，从而也就能够及时地作出必要的调整；特殊地，即使出现了错误，他们也不会简单地抛弃已有的工作，而是力图从中吸取有益的成分；最后，在成功地解决了问题以后，他们又能自觉地对所已进行的工作作出回顾，特别是深入地思考是否还存在更为有效的解题途径。⑮

显然，从教学的角度看，以上的分析也就十分清楚地表明了这样一点：经常地问及以下三个问题正是促进学生元认知能力的一个有效手段：

"什么？"(what)("现在在干什么？"或"准备干什么？")

"为什么？"(why)("为什么要这样做？")

"如何？"(how)("这样做的实际效果如何？")

当然，这方面的更高目标即是应当努力促进学生在这一方面的自觉性，也即能够养成在上述方面经常自觉进行自我反思的良好习惯。

第三，观(信)念。所谓"观(信)念"(belief)，在此是指解题者的数学观、数学教育(学)观及其对于自我解题能力的认识等。研究表明，尽管所说的这些观念在很多情况下只是一些不自觉的认识(从而，这主要地就应被看是一种"信念"，而并非"观念")，但其对于解题者的解题活动仍然有着十分重要的影响。

---

⑮ 这方面的一些实例可参见 A. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving, Academic Press Inc., 1985

例如，按照舍费尔德等人的研究，以下就是在美国中、小学生中十分普遍的一些观（信）念：

“只有书呆子才喜欢数学。”

“数学是无意义的，即是与日常生活毫无联系的。”

“学习数学的方法就是记忆和模仿，你不用去理解，也不可能真正搞懂。”

“教师的职责是‘给予’，学生的职责则是‘接受’。”

“没有学过的东西就不可能懂，只有天才才能在数学中作出发明创造。”

“教师所给出的每个问题都是可解的，我解不出来是因为不够聪明。”

“每个问题都只有惟一的正确解答。”

“每个问题都只有惟一的正确解题方法。”

“每个问题都只需花费 5～10 分钟就可解决，否则就不可能单凭自己的努力获得解决。”

“教师是最后的仲裁者，学生所给出的解答的对错和解题方法的‘好坏’都由教师最终裁定。”

“数学证明只是对一些人们早已了解的东西去进行检验，从而就只是一种“教学游戏”，而没有任何真正的价值。”

“观察和实验是靠不住的，从而在数学中就没有任何地位。”

“猜想在数学中也没有任何地位，因为数学是完全严格的。”

显然，上述观念必然会对学生的数学学习、包括解题活动产生极大的消极影响。对此由以下的实例即可清楚地看出：

这是美国第三次全国教育进展评估中的一个试题：

“每辆卡车可以载 36 个士兵，现有 1 128 个士兵需用卡车运送到训练营地，问需用多少辆卡车？”

测试结果表明，有 70%的学生正确地完成了计算，即得出了以 36 去除 1 128，商为 31，余数为 12；然而，就最终的答案而言，却有 29%的学生回答“需要 31 余 12”，另有 18%的学生的答案为“31”，而只有 23%的学生给出了“32”这一正确的解答。

对于这一结果，舍费尔德分析道：“当学生回答汽车有余数时，他们显然没有把这一问题看成真实的。他们把它看成是学校中虚构的数学问题——为了练习而杜撰的故事，而学生所需做的只是进行计算并把答数写下来。……学生是从哪里习得这样的荒谬做法的？正是在他们的数学课堂中，通过机械的练习而习得。”

再例如，作为一种系统的研究，舍费尔德并曾对以下观点的形成过程及其后果进行了深入分析：“每个问题都只需花费 5～10 分钟就可解决，否则就不可能单凭自己的努力获得解决。”

舍费尔德写道：“在整个学年中，我们所观察的 12 个班级中没有一个学生所做的数学作业可以称得上严格意义上的数学问题。学生所做的都是些练习，而设计这些

作业的目的则是为了表明学生对于学科内容的较小组块的掌握情况，并要求这些作业能在较短的时间内得以完成。例如，在一个标准的五天工作周中，学生分别被要求完成28、45、27和30题'家庭作业'。……教师让学生尽可能多地在黑板上演示家庭作业的答案。考虑到作业的数量，这就意味着他期望学生能在45分钟的时间内完成20题或更多的'问题'。事实上，在一次关于轨迹和作图的单元考核(全校10个班级的统一数学考核)中，竟包括有25个问题——学生平均每2分10秒就得解决一个问题。教师给学生的建议是：'你们应当熟悉所有的作图题，这样就不必花费很多时间去进行思考了。'"

"总的来说，学生在12年的数学学习过程中做了成千上万道的'问题'——事实上，对于每道题都期望学生能在几分钟内得到完成。在这种布置后面的假设是：如果你理解了教材，就可以做出这些练习；而如果未能在合理的时间内做完练习，就说明你并没有理解，从而就需要帮助。"

"无论教师是否打算把这一假设传递给学生，学生都形成了这样的看法。"

例如，在对九到十二年级的12个数学班所作的一次调查中，舍费尔德提出了如下的问题：

"如果你理解了教材，对于家庭作业中的一个标准问题需要多少时间去求解?"

学生回答的平均数是2.2分钟!

从而，总的来说，学生主要地就是通过学校中的数学学习逐渐养成了所说的各种错误观念，而所已形成的错误观念则又对新的数学学习、包括新的解题活动产生了严重的消极影响；进而，新的数学学习、特别是新的解题活动的失败反过来则又进一步强化了原先的错误观念……从而，我们在此事实上就看到了某种"恶性循环"，而其最终结果则是使学生完全丧失了对于数学学习的兴趣和信心(乃至对整个人生的信心)——也正是在这样的意义上，美国著名数学教育家R.戴维斯写道："我们的学校已接近于毁灭年轻的一代。"

显然，就我们目前的论题而言，十分清楚地表明了这样一点：观念也是影响解决问题能力的一个重要因素。

综上所述，相对于波利亚的数学启发法而言，关于"问题解决"的现代研究已经取得了新的重要进展，特别是，以上所提及的四个要素(必要的知识与知识的良好组织、启发法、元认知、观念)即是为这方面的进一步工作提供了一个新的理论框架。(对此可详见郑毓信，《问题解决与数学教育》，江苏教育出版社，1994)

第三节　努力促进数学方法论的深入发展

一、国内外相关研究的必要互补

将国外的相关研究与国内的数学方法论研究加以对照，容易看出，两者在很大程度上可被看成平行的发展。

首先，在国外的相关研究与国内的数学方法论研究这两者之间显然存在有很多的共同点。例如，与国外关于“问题解决”的研究相对应，启发性解题策略在国内的数学方法论研究中也占有十分重要的位置；而且，从实际的发展过程看，两者又都以波利亚的数学启发法作为实际的出发点，并在一定程度上实现了对于波利亚的“超越”。另外，无论就中国的数学方法论研究，或是国外关于“问题解决”的现代研究而言，又都表现出了与数学教育密切相关的重要特点，并在很大程度上就以促进数学教育作为直接的工作目标——如前所述，后者事实上也就是相应的研究何以能够不断取得新的重要进展的一个重要原因。

其次，除了上述的共同点以外，国外的相关研究与国内的数学方法论研究相比，也有一定的不同之处，特别是，两者显然有着不同的研究重点，并已形成了不同的研究特色和相对独立的研究内容。例如，如果说国内的研究具有较强的方法论色彩，即主要地被定义成关于数学思维模式或方法的研究，那么，国外的相关研究则可说与心理学(特别是认知学习心理学)的研究表现出了更为紧密的联系，即更加注意对于实际的数学思维活动，包括学生在数学学习过程中真实思维活动的深入考察。

正因如此，就数学方法论的深入发展而言，我们显然就应十分注意吸收国外的积极研究成果，或者说，这事实上也应被看成深入开展数学方法论研究的又一重要的指导性原则：

在积极开展相对独立的研究工作的同时，我们又应十分关注国外相关研究的最新进展，并通过国内外研究成果的分析、比较与整合促进数学方法论研究的深入发展。

应当指出，对于以上所说的“研究成果”我们不应仅仅理解为方法论研究中的各个具体结论，而且也应包括研究方法、研究思想等方面的内容。例如，在笔者看来，这正是国外的相关研究所给予我们的一个重要启示，即数学方法论的研究不应局限于纯理性的分析，而应以相应的心理学研究(包括数学发明心理学和数学学习心理学)、也即应当以对于实际数学思维活动的深入考察作为必要的基础。更为一般地说，数学方法论的研究应当成为一种开放的研究，也即应当注意从各种相关的研究(包括认知科学、人工智能、数学[科学]哲学、乃至人类学研究等)中吸取有益的成果

或思想。

为了清楚地说明问题，在此还可从比较的角度对国内数学方法论研究的现状作一简要的分析。

如前所述，20 世纪 80 年代，数学方法论在我国得到了迅速的发展。然而，如果就理论研究的情况进行分析，从 20 世纪 90 年代起则可说在一定程度上陷入了发展的停顿。例如，尽管出版了不少数学方法论的著作，但在很多这样的"专著"中却看不到任何创造性的工作，甚至只能说是对于别人先前已出版的著作的简单翻版或直接"抄袭"；再例如，尽管有些著作声称建立起了数学方法论的理论体系，但由仔细的阅读却可看出，这在很大程度上只是闭门造车的结果，或者说，其所建构的体系实质上仅仅是一种文字游戏。

造成上述现象的原因当然是多方面的。例如，从个人的角度看，"急功近利"无疑是一个重要的原因。例如，就如上面所已提及的，这显然就是这种"急功近利"态度的一个直接表现，即某些数学思维论的著作事实上只是在一般思维论的理论框架内加入了若干数学的例子。另外，除去这种个人的因素以外，我们当然也应从方法论的角度作出进一步的分析，特别是，笔者认为，为了在数学方法论的研究中取得新的重要进展，我们必须在研究方法、包括研究思想等方面不断作出必要的改进，因为，如果始终只是因袭旧的研究框架而缺乏创新意识，那就不仅不可能在数学方法论的研究中作出新的重要贡献，而且必然会造成研究工作的严重"蜕化"。例如，在笔者看来，如果在数学方法论的研究中"言之必称波利亚"，这事实上就是一种"蜕化"，因为，归根结底地说，数学方法论是对于数学思维方法与模式的研究，而并非对于波利亚的研究。再例如，由于实际的数学活动构成了数学方法论的生命之源，因此，如果完全沉溺于思辨性的工作，包括一味地追求理论的完美性、精致性等，这种研究也必将成为"无源之水""无本之木"，直至最终完全丧失了存在的价值。

应当强调的是，国外的相关研究也可被看成已从反面清楚地表明了迅速改变上述做法的必要性和紧迫性。例如，正如前面所已提及的，就欧美各国在 20 世纪 80 年代初期的情况而言，关于"问题解决"的研究应当说在很大程度上主要停留于波利亚的数学启发法，以致"数学启发法"在当时几乎成了"问题解决"的同义词，而这事实上也就是相关的教学实践未能获得预期成功的一个主要原因。又正是依靠立足于实际的数学活动，特别是通过对于实际解题活动的深入考察，人们最终不仅顺利地摆脱了所说的困境，更成功地实现了对于波利亚的超越，即是清楚地指明了这样一点：为了提高学生解决问题的能力，除了"必要的数学知识与知识的良好组织"和"数学启发法"以外，我们还应注意更多的环节，特别是，应充分重视"元认知"和"观念"这些十分重要、然而却又常常被人们忽视的因素。

综上所述，为了促进数学方法论研究的深入发展，我们就必须注意吸收国外积极的研究成果，包括研究方法和研究思想等。当然，作为问题的另一方面，在积极吸

取国外最新研究成果的同时，我们又应十分注意保持研究的相对独立性，特别是，我们不能因为我国在数学方法论领域内所已取得的一些独立成果不能被完全纳入到国外相关研究的已有框架之中就轻易地对此予以放弃；恰恰相反，我们应通过国内外已有工作的比较和分析更为深入地开展数学方法论的研究，包括努力实现两者的必要互补与整合。

二、由“问题解决”到“数学地思维”

就数学方法论研究的深入发展而言，切实立足实际的数学活动（包括数学教学）是最为重要的，另外，我们在此显然也应切实加强理论思维，包括对于已有工作的必要总结与反思。以下就联系“问题解决”对此作出更为具体的论述。

具体地说，尽管我们应当十分注意如何能由“问题解决”这一国际性的数学教育改革运动获取深入开展数学方法论研究的有益启示，包括积极吸取相关的理论成果。但是，作为问题的另一方面，我们又不应盲目地去追随潮流，或者不加分析地去接受一切来自国外的理论主张或信息。恰恰相反，即使就对于国外研究成果的吸取而言，我们也应坚持从理论高度作出自己的独立分析，从而不仅能够很好地吸取其中的积极成分，同时也能清楚地看到它们的局限性或不足之处，并可通过进一步的工作做到真正的超越。

“问题解决”与“问题提出” 应当指明，从理论的角度看，数学观的现代演变，也即由静态数学观向动态数学观的演变，也应被看成为“问题解决”这一数学教育改革运动提供了重要的理论背景，因为，从动态的数学观这一角度去分析，在数学教学中我们显然就不应惟一地集中于数学活动的最终产物，而应更加关注数学活动本身。

但是，现在的问题是：所说的“数学活动”是否就应被等同于“问题解决”，也即仅仅是指如何综合地、创造性地应用各种数学知识和技能去解决那种并非单纯练习题式的问题（包括实际问题和源于数学内部的问题）？

尽管在不少相关的指导性文件中，我们都可看到上述的观点[16]，但是，如果就实际的数学活动去进行分析，我们则又可看出这一结论具有一定的局限性。例如，一个明显的问题就在于：我们应当如何看待“问题解决”与“问题提出”的关系？特别是，那些有待于解决的问题是从何而来的？

事实上，这是一个公认的观点，即是认为提出问题的能力应当被看成创造性才能的一个主要表现。例如，爱因斯坦等人就曾明确指出：“提出一个问题比解决一个

---

[16] 例如，美国著名数学教育家T. 伦伯格（他是美国数学教师全国委员会所特设的关于学校数学课程标准的专门委员会的主席）就曾明确指出，在《行动的议程》、《学校数学课程与评估的标准》等一些文件中，“问题解决突出地被看成是数学家的主要活动”。

问题更为重要，因为解决问题也许是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题、新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要创造性的想像力，而且标志着科学的真正进步。”

另外，从数学教育的角度看，这显然也应被看成传统的“传授—接受”式教学思想的一个具体表现，即学生总是被要求去求解由其他人（教师、教材编写者、考试设计者等）所提出的问题——特殊地，在笔者看来，这事实上也就是“问题解决”这一口号何以常常与“应试教育”表现出一定的相容性、甚至直接为后者所利用的一个重要原因。

鉴于以上的认识，“问题提出”近年来在数学教育界中获得了越来越多的重视就十分自然了。[17] 更为一般地说，我们则又应当清楚地看到在“问题解决”与“问题提出”这两者之间所存在的相互制约、互相依赖的辩证关系。

例如，正如波利亚所指出的，在解决问题的过程中，我们常常需要引进辅助问题：“如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？”——显然，后者事实上就属于“问题提出”的范围。

由此可见，在现代的数学方法论研究中，我们就不能惟一地局限于“解题方法”的研究，而还应当进一步去关注“提出问题的方法”。（对于后者，我们将在第七章中作出具体论述。）

“问题解决”与“数学地思维” 如果说以上的讨论主要涉及实际数学活动的出发点，那么，作为进一步的思考，我们则又应当考虑这样的问题：“问题解决”——在此是指具体解答的获得，包括肯定性解答（即如求得了所要求取的未知量）和否定性解答（即如证明了原来的问题是不可能得到解决的）——能否被看成相应的数学活动的结束？或者说，解答的获得是否就应被看成数学活动的一个主要目标？

显然，如果从较小的范围进行分析，特别是仅仅着眼于数学知识的实际应用的话，那么，对于上述问题也许可以作出肯定的答复。但是，如果我们着眼于更大的范围，特别是考虑到数学的理论研究，在此无疑就应作出否定性的答复，因为，这正是数学思维的一个重要特点，即数学家们总是不满足于某些具体结果或结论的获得，而是希望能够获得更为深入的理解，后者则又直接导致了对于严格的逻辑证明的寻求，也促使数学家积极地去从事进一步的研究，即如在这些看上去并无联系的事实背后是否隐藏着某种普遍的理论，这些事实能否被纳入某个统一的数学结构？等等；数学家们也总是希望能达到更大的简单性和精致性，如是否存在更为简单的证明，能否对相应的表述方式（包括符号等）作出适当的改进，等等。

---

[17] 对此可参见 E. Silver 的综述性文章“On Mathematical Problem Posing”，载《Proceedings of the 17th International Conference of PME》，1993，Vol. I，第 66～85 页

也正是从上述的立场出发，一些数学家对“问题解决”这一数学教育改革运动中所出现的一些偏向提出了尖锐的批评。例如，为了使数学对大多数学生来说成为更有吸引力和力所能及的，“开放性问题”在现代的数学教育中得到了广泛的应用，因为，普遍认为，与具有惟一正确解答、甚至惟一正确解题方法的“传统问题”相比，开放性问题更适于使所有的学生参与到解题活动之中：他们可以依据各自的水平去进行求解（另外，“开放题”的应用对于切实纠正学生中所普遍存在的以下观念显然也十分有益：“每个问题都只有唯一的正确解答，并有惟一的正确解题方法”）。但是，在相关的教学实践中我们却又经常可以看到这样的现象：学生们（甚至包括教师）只是满足于用某种方法（包括观察、实验和猜测）求得了问题的解答，而不再进行进一步的思考和研究，甚至都未能对所已获得的结果的正确性（包括完整性）作出必要的检验或证明。从而，“在现实中，开放性问题在某些场合正在成为不求甚解和不加检验的猜测的同义词”。这一现象当然引起了数学家们的极大不安：“尽管这一讨论仅限于开放性问题，但对于新的改革的某些方面的大致了解已经使得数学家对数学教育的前进方向产生了疑虑”（H. Wu）；“我所担心的是：通过使数学变得越来越易于接受，最终所得出的将并非是数学，而是什么别的东西”（A. Cuoco）。

当然，我们并不能因为在实践中出现了某些偏差就对新的改革运动持绝对否定的态度。但是，在笔者看来，这又的确从又一侧面表明了“问题解决”这一口号的局限性。这就是指，与单纯强调“问题解决”相比，我们应当更为明确地提出这样的主张：“求取解答并继续前进”。进而，从更深入的层次看，这也就是指，与“问题解决”这一口号相比，“数学地思维”应当说是更为恰当的，也即我们应当把帮助学生学会数学地思维看成数学教育的主要目标。值得指出的是，后者事实上也就是美国在“问题解决”这一方向上的主要学术带头人之一舍费尔德通过自己的实践所总结出的一条教训：“现在让我回到‘问题解决’这一论题。尽管我在1985年出版的书用了《数学问题解决》这样一个名称，但我现在认识到这一名称的选用是不很恰当的。我所考虑的是，单纯的问题解决的思想过于狭窄了。我所希望的并非仅仅是教会我的学生解决问题——特别是由别人所提出的问题，而是帮助他们学会数学地思维。”

显然，以上的分析事实上也就为如何更好地去开展数学方法论的研究指明了前进的方向：作为数学思维方法的研究，我们不应惟一地局限于“解题策略”，而还应当包括更为广泛的内容，特别是，我们应十分重视所谓的“数学的研究精神”，即如何由已有的工作去引出新的研究问题或开拓出新的研究方向。（容易看出，后者是与前面所提及的“提出问题的方法”密切相关的。相应的方法论原则可详见徐利治、郑毓信，《数学抽象的方法与抽象度分析法》，江苏教育出版社，1991）

最后，还应提及的是，强调“数学地思维”，事实上也就更好地体现了这样一种基本的数学教育思想：数学不应被看成单纯的工具，而且也对思维的训练有着十分重要的意义，并且，后者直接关系到了数学的文化价值，特别是人类理性精神的发展。

这也就如著名数学史学家克莱因所指出的:“在最广泛的意义上说,数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,使得人类的思维得以运用到最完善的程度;亦正是这种精神,试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活,试图回答有关人类自身存在提出的问题,试图努力去理解和控制自然,试图尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完美的内涵。”

“问题解决”与数学知识的教学 从教学的角度看,以下的问题显然也应引起我们的高度关注:我们应当如何以“问题解决”(或者说,“数学地思维”)为中心去组织全部的数学教学?特别是,我们又应如何去处理提高学生解决问题的能力与数学基础知识与基本技能的学习这两者之间的关系?

以下即是对于上述的问题的一种可能解答:“问题解决”不仅涉及数学教育的基本目标,而且也应被看成数学教学的一个基本形式,这就是说,全部的学校数学课程都应采取“问题解决”这样一种形式。例如,由美国著名数学教育家T.伦伯格所提出的关于数学课程设计的如下五条原则就可被看成这方面的一个具体例子,特别是,它具体地指明了应当如何去处理“问题解决”与数学基础知识与基本技能的教学这两者之间的关系:

第一,应当清楚地指明我们所希望学生掌握的若干概念领域;第二,这些领域应当被分解成若干个课程单元,每个单元各有一个主题,并用2～3个星期来学习;第三,对学生来说,这些概念领域应当由一定的“问题情境”自然而然地引出;第四,各单元中的活动安排应当与学生的思维活动相适应;第五,课程单元应当根据学生的知识情况及教学环境不断地加以调整。

与上述较为极端的立场相对立,以下则可被看作20世纪90年代以来数学教育界的一个共识,即是认为数学教育应当“过程与结果并重”。由于后者主要地就可被看成人们经由对过去十几年中“问题解决”的教学实践进行自觉反思所得出的一个结论,因此,这事实上也就在一定程度上反映了上述的主张在实践中存在一定的偏废或不足之处。

更为一般地,笔者以为,我们在此事实上应对“基本的教育思想”和“数学教学的基本形式”作出明确的区分。这也就是说,强调提高学生解决问题的能力并不意味着数学课程必须惟一地采取“问题解决”的形式。进而,如果我们把着眼点由狭义的“问题解决”转移到“数学地思维”,那么,另一种教学形式事实上也就更为可取。

具体地说,笔者在此所强调的主要是这样一个事实:数学的思维方法并不是什么高度抽象、不可捉摸的东西,而是渗透于各种具体的数学活动之中,后者既包括问题解决,也包括各种基本的数学知识和技能的学习。从而,尽管在某些特定条件下确有必要进行“问题解决”(或者说,数学思维方法)的专门教学,如相对集中地通过典型例子进行启发性解题策略的教学等。但是,与这种相对集中的专门教学相比,如何将数学思维方法(更为一般地说,就是数学方法论)的教学与具体数学知识内容

的教学密切地结合起来，也即以思维方法的分析去带动、促进具体数学知识内容的教学，则是更为重要的。因为，第一，只有将数学思维方法的分析渗透于具体数学知识内容的教学之中，我们才能使学生真正看到思维方法的力量，并使之真正成为可以理解的、可以学到手的和能够加以推广应用的；反之，“数学思维方法”也才不会变成一门纸上谈兵、借题发挥的空洞“学问”。第二，又只有通过深入地揭示隐藏在具体数学知识背后的思维方法，我们才能真正做到把数学课“讲活”“讲懂”“讲深”——所谓“讲活”，是指教师应通过自己的教学活动向学生展现“活生生的”数学研究工作，而不是死的数学知识；所谓“讲懂”，则是指教师应当帮助学生真正理解有关的教学内容，而不是囫囵吞枣，死记硬背；所谓“讲深”，是指教师在数学教学中不仅应使学生掌握具体的数学知识，而且也应帮助学生学会领会内在的思维方法。

当然，强调数学方法论的教学与具体数学知识内容的教学的密切结合，并不应被理解成重新回到传统的“传授—接受”型模式。例如，正如伦伯格的设计所已清楚地表明的，数学基础知识与基本技能的学习在很多情况下也可采取“问题解决”的形式。但是，这又的确是笔者的一个基本观点，即是认为数学思维方式在大多数情况下并不能通过单纯的解题活动“自发地”得到形成。例如，在笔者看来，这事实上也就可被看成中国古代数学的发展历史所给予我们的一个重要教益；另外，从认识论的角度看，这无疑也应被看成建构主义（更为准确地说，应是社会建构主义）的数学学习观的一个重要结论，即数学学习是主体在一定社会环境之中的建构活动（特殊地，教师的必要示范与启发就应被看成“良好的学习环境”的一个重要组成成分），而主要地是一种文化继承的行为。

在第 7 章中，我们还将结合诸多具体例子对如何以数学思维方法的分析带动、促进具体数学知识内容的教学作出进一步的分析。

结束语 尽管在以上我们只是围绕国际上关于“问题解决”的理论研究和教学实践进行了分析，但是，这又的确十分清楚地表明了这样一点：在积极开展相对独立的研究工作的同时，我们又应十分关注国外相关研究的最新进展，更应通过国内外研究成果的综合分析、比较与整合以促进数学方法论研究的深入发展。（关于后一方面的初步工作可见郑毓信，《数学思维与数学方法论》，四川教育出版社，2001）

第7章 数学方法论与数学教学

如何能够使得数学方法论的学习和研究与实际的数学教学活动更为紧密地联系起来，这无疑是广大数学教师特别关心的一个问题。在本章中，我们就将通过若干案例从正、反两个方面对此作出具体的说明；同时我们也将从教学的角度对如何培养学生提出问题的能力作出简要的论述。

应当指明的是，尽管笔者先前曾在中学长期担任数学教师，但由于自1978年起就已进入高校，因而对目前所使用的中小学教材就不能说有很好的了解，因此，以下所引用的大部分案例主要就来源于其他同志的一些教研文章或著作，而笔者的主要工作则是从理论与教学实践的紧密结合这一角度，对此作出简要的分析与评论。希望这些分析与评论对于广大教师能有一定的帮助和启示作用。事实上，在笔者看来，这也应当被看成学习数学方法论的一个基本途径，即不应停留于纯粹的理论学习，而应更加重视如何能将所学到的各种方法或策略应用到实际的数学活动中去，包括以数学思维方法的分析去带动和促进具体数学知识内容的教学。

第一节 数学方法论与数学教学

一、方法论的重建

正如第6章中已指明的，数学方法论对于数学教学的积极意义主要在于：以数学方法论为指导去进行具体数学知识内容的教学有助于我们将数学课“讲活”“讲懂”“讲深”。

但是，我们又如何才能达到上述目标呢？笔者以为，在此所需要的并不是某种“事后诸葛亮”式的点缀，即如在相关的解题活动获得成功以后以“专家”的口吻作出如下的点评：“这是……方法”，“那是……方法”。恰恰相反，我们应当通过相关内容的“方法论重建”（或者说，“理性重建”）使之真正成为“可以理解的”“可以学到手的”和“能够加以推广应用的”。显然，这事实上也就表明所说的“方法论重建”并不是对于某些现成法则的机械应用，而是一种创造性工作，更应充分体现“化难为易”和“化神奇为平凡”的重要特色。

为了清楚地说明问题，仍可首先回到第1章中所已提及的以下两个实例：

【例1】 这是关于少年高斯的一个神奇传说：也许是为了“忙中偷闲”，一位小学教师给自己的学生出了这样一个“难题”：$1+2+3+\cdots+99=?$ 然而，还未等这位教师在位子上真正坐定，小高斯就已报出了如下的正确答案：4 950。

显然，由于缺乏可靠的资料，对于高斯在当时究竟是如何得出这一解答的，我们已无从猜测，但是，我们仍可通过方法论的重建使之成为“可以理解的”“可以学到手的”和“能够加以推广应用的”。例如，正如第一章中所已指明的，这一计算过程就可被看成所谓的“加倍法”的一个具体应用，或者说，我们即可按照以下的顺序（如图7－1）十分自然地引导出相应的“解题思路”：

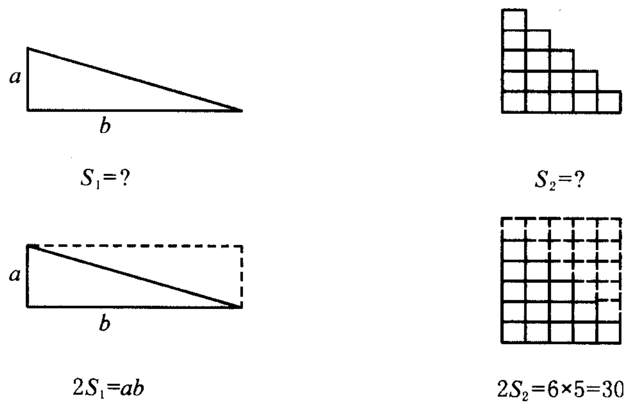


图7－1

从而，为了求解 $S=1+2+3+\cdots+99=?$

我们就可首先求得

$2S=1+2+3+\cdots+99+99+98+97+\cdots+1=100\times99=9\ 900$。

这样原先的问题也就立即获得了解决：$S=4\ 950$。

【例2】 在初次看到由波利亚所给出的以下解法时相信绝大多数读者一定会发出由衷的赞叹：这真可谓“奇思妙想”，从而就决非我们这些凡夫俗子所能学到手的：为了解决“一个农夫有若干只鸡和兔子，它们共有50个头和140个脚，问鸡兔各有多少只？”这样一个问题，波利亚设想了这样一种奇特的现象：“每只鸡都仅用一只脚站在地下，而兔子则举起了前腿，……”（详见第一章第一节例9）

但是，又如波利亚本人所指明的，只需掌握了一定的方法，我们就可“化神奇为平凡”，也即清楚地揭示上述巧妙解法的本质。

具体地说，我们在此可以首先将日常语言翻译成代数语言：

日常语言	代数语言
农夫有若干只鸡	x
和若干只兔子，	y
它们共有 50 个头	$x+y=50$
和 140 个脚，	$2x+4y=140$

显然，这时原来的问题就被归结成了如何去求解以下的二元一次方法组：

$$\begin{cases} x+y=50, \\ 2x+4y=140。\end{cases}$$

而又只需稍具代数知识，我们就可立即求得：$x=30, y=20$。

进而，如果以 h 去代替题目中的 50，用 f 代替 140，也即用 h 和 f 分别表示问题中头的数目和脚的数目，我们就得到了如下的方程组：

$$\begin{cases} x+y=h, \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+4y=f。\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

后一方程组显然又可用以下的方法去求解：

$(2)\times\frac{1}{2}$得 $x+2y=\frac{f}{2}$。$\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(3)-(1)$得 $y=\frac{f}{2}-h$。

这也就是说，兔子的数目等于脚数的一半减去头数。显然，这就是上面所给出的巧妙解法。

与以上的两个例子不同，以下的实例主要表明了我们可以如何通过适当的例子去进行(启发性)解题策略的教学。

【例 3】 教师所给出的问题是这样的："如何在图 7－2 所示的九个方格中分别放入 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这九个数字，使得每一行、每一列、每条对角线上数字的和都相等？"

作为教学开端，教师首先提出了这样的问题：

"什么样的信息可以使得这一问题变得较为容易求解？"

显然，如果我们能知道每一行、每一列、每条对角线上数字的和究竟是多少，原来的问题就会变得较为容易求解。

在此我们用到了这样的方法论原则：

设立次目标 努力求得部分的结果，并利用它作为出发点去求得剩余的部分。

然而，我们又怎样才能求得所说的和数呢？假设我们已经获得了所要求的解答，它经常可以给我们以帮助：我们可以由此去推出解答所必然具有的性质。

现假设所说的和为 S，把三个列全部加起来，其和显然为 $3S$，但它同时又等于 1，2，3，…9 这九个数字的和，即为 45，从而就有 $S=15$。

在此我们用到了这样的方法论原则：

从后往前推 假设我们已经获得了解答，由此从后往前推以确定它所必然具有的性质。

现考虑这样的问题：

在所有九个方格中哪一个最为重要？

显然是居中的那个。

以下就是相应的方法论原则：

关键性原则 集中注意关键点，常常会给你带来力量。

图 7－2

	9	

图 7－3

	1	

图 7－4

能否把 9 放在中间的方格？（如图 7－3）不行，因为这时我们就无法放置 8 了：无论把 8 放置在哪里，我们都必须将 9 和 8 加起来，但其和已经超过了 15。（那么，9 应当放在哪里呢？）依据同样的考虑，8、7、6 这几个数字也都不能放在中间。1 能否放在中间？（如图 7－4）也不行，因为这时 2 必然出现在某个地方，而为了使相应的行、列或对角线上的数字的和为 15，就必须加上 12，但这是不可能的。（那么，1 应当放在哪里呢？）依据同样的道理，2，3，4 这几个数字也都不能放在中间。

现在很清楚，5 是可以放在中间的惟一选择。

上面的推理过程表明了这样一条方法论原则：

特殊化原则 首先对特殊的情况进行研究：

在确定了 5 应放在中间的前提下，我们再来考虑 1 应当放在哪里。如图 7－5 所示，在此只有两种可能性，而这事实上又用到了如下的方法论原则：

对称性原则 在解题时应充分考虑和利用对称性。

1?	1?	
	5	

图 7－5

1		
	5	
		9

图 7－6

在得出了上述的结果以后，剩下的工作就没有什么困难了。

假设我们把 1 放在左上角（图 7－6），这时就必须将 9 放在右下角，这样才能保

证相应的对角线上的数字的和为 15。进而再考虑 2 的可能位置：同样依据对称性，这时显然只需考虑如下三种可能性，即如图 7－7、7－8、7－9 所示的情况：

1		
2?	5	
		9

图 7－7

1		
	5	
2?		9

图 7－8

1		
	5	
	2?	9

图 7－9

但是，仔细观察后又可看出：这几种可能性最终都将导致“矛盾”。例如，在如图 7－9 所示的情况下，我们必须将 4 放在左下角的位置，但这时就必须在最左一排的中间位置放上 10，而这是不可能的。

从而，1 就必须放在其他的位置。现设将 1 放在上排中间的位置，这时就必须将 9 放在下排中间的位置，以保证中间一列的数字的和为 15。这时 2 仍有三种可能的位置(图 7－10、图 7－11和图 7－12)：

2?	1	
	5	
	9	

图 7－10

	1	
2?	5	
	9	

图 7－11

	1	
	5	
2?	9	

图 7－12

现假设将 2 放在图 7－10 所示的位置，容易发现这时必须在右上角放置 12；而如果将 2 放在图 7－11 所示的位置，则就无法放置 3。从而图 7－12 就是惟一的可能性。

这样继续下去，我们就可获得最终的解答，如图 7－13 所示。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

图 7－13

上述解答的获得是否意味着解题活动的结束？不！我们还应继续考虑是否有其他的解题方法。

由于原来的问题要把 1～9 这九个数字分成这样的“三数组”，使其和等于 15，因此我们在此也可首先尝试着把所有这样的“三数组”都列举出来。

相应的方法论原则为：

由前往后走　看看利用现有的对象可以得到多少种组合。

学生们给出了如下的一些数组：

(3,5,7)；(8,1,6)；(4,5,6)；(1,5,9)；(7,6,2)；(6,8,1)；(2,4,9)；……

这时有学生提出(8,1,6)和(6,8,1)这两个组，事实上是重复的，必须舍去其中

之一。这时工作出现了停顿,因为学生们似乎再也列举不出新的"三数组"了。显然,这样的随意列举既容易重复,也不能保证没有遗漏。从而,我们在此就应采取如下的方法论原则:

系统化原则 系统地进行工作会有很大的帮助。

例如,我们在此即可按照增大的次序去列举出各个"三数组"。事实是,按照所说的次序,学生仅用1~2分钟就列举出以下各个数组:

(1,5,9);(1,6,8);(2,4,9);(2,5,8);(2,6,7);(3,4,8);(3,5,7);(4,5,6)。

正如前面已指出的:中间的方格应当被看成具有特别的重要性:这一方格中的数字被同时包含在四个"三数组"之中(两条对角线,一条横行,一条竖列)。对上面所列出的各个数组进行观察,容易发现其中只有一个数字同时出现在四个数组之中,这就是5。从而,如果有解的话,中间的数字就一定是5。

那么,角上的数字和四周中间位置的数字又分别是几呢?显然,角上的数字将同时包含在三个数组之中,四周中间位置的数字则将同时属于两个数组。另外,通过实际观察我们又可发现2,4,6,8这四个数字在上述各个"三数组"中都出现了三次,而1,3,7,9则都出现了两次。从而,如果有解的话,角上的数字就必定是2,4,6,8这四个数字,四周中间的数字则必定是1,3,7和9。

这样,上述的问题也就立即获得了解决。

由此,我们又可引出如下的方法论原则:

开放性原则 在数学中往往有不止一种的解题方法。

现在我们已经得到了两种不同的解法,大概再没有什么事情可做了吧?

不!我们还应进一步去考虑如何对已获得的结果作出推广,也即如何由已解决的问题提出新的问题。例如:

(1) 上面所用到的数字是1到9,能否用2到10这九个数字去完成同样的工作?又能否采用87到95这九个数字?

(2) 能否用3,6,9,12,18,…,27这九个数字去完成同样的工作或是用1到9这九个数字的其他倍数?

(3) 能否用5,8,11,14,17,20,…,29这九个数字去完成同样的工作或是任何一个算术级数?

显然,我们还可在更为一般的意义上去作出进一步的推广(对于如何依据已解决的问题去提出新的问题我们还将在第二节中作出具体论述)。

二、化难为易、化神奇为平凡

上面的例子显然已表明,应当将"化难为易"和"化神奇为平凡"看成方法论重建的必要条件。也正是从这样的角度去分析,以下各个案例或许就可被看成这方面的

一些“反例”。

【例4】 正如大家所熟悉的，三角形的内角平分线性质(这即是指，“三角形中一个角的平分线分对边所得的两条线段与这个角的两边对应成比例”)的证明应当说并不困难(如图7－14)。但是，从教学的角度看，我们在此显然又应考虑这样一个问题：这一证明思路是如何得出的？我们又应如何使得定理的证明对于学生来说显得十分自然？因为，不可否认的是，CE这一辅助线的添加在此很像是波利亚所说的“从帽子中掏出来的兔子”。

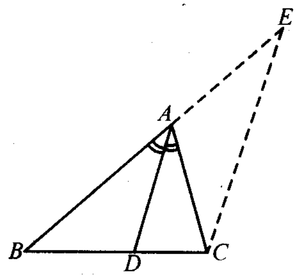


图7－14

大概也正是基于这样的考虑，相关老师在其所撰写的教案“三角形内角平分线性质”(载《名师授课录，初中版》，上海教育出版社，1992)中就采取了让学生主动进行探索的作法。具体地说，在对平行线分线段成比例这一定理进行回忆以后，教师首先提出了这样的问题：“除平行线以外，是不是还有其他的几何图形能够获得成比例的线段呢？”进而，“考虑到初中学生的认识特点”，教师又采取了如下的作法，即是首先指明了“等腰三角形顶角的平分线可以分线段与已给两线段成比例”(后者是指，$AB : AC = 1 : 1$，$BD : DC = 1 : 1$，从而就有$AB : AC = BD : DC$，如图7－15)，然后再让学生进一步去探索：“对一般三角形来说，它的内角平分线是否也具备同样的性质呢？”例如，教师提出：“第一，请大家在等腰三角形的基础上，延长一条边，使AB和AC满足一定的比值，然后看一看这时$\angle A$的平分线使BD与DC之比起怎样的变化？能不能获得成比例线段？第二，在这个例子的启发下，猜想一下一般三角形内角平分线会有什么性质？”

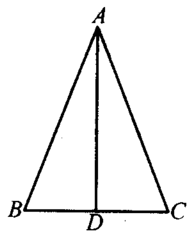


图7－15

让学生通过主动的探索去发现相应的定理当然很好，但是，就以上的实际作法而言，笔者以为，这实在很难说是真正的“发现”，毋宁说，学生在此无需就各个具体情况(即如使$AB : AC = 2 : 1$或$AB : AC = 3 : 1$)实际地去进行度量，就可由老师的“引导”直接猜想出老师所“暗示”的结果：三角形的内角平分线分对边所得的两条线段与这个角的两边对应成比例；另外，教案中以等腰三角形作为一般三角形的特例，并希望通过“由特殊到一般”引出相应的结论，也实在有点勉强。因为，人们恐怕很少会将两条线段的相等写成$1 : 1$的形式，至于由$AB : AC = 1 : 1$和$BD : DC = 1 : 1$引出“等腰三角形顶角的平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例”则就更是“匪夷所思”了。

与上述的作法不同，笔者以为，我们在此或许可以采取这样的方法：由于我们刚刚引进了三角形的角平分线、高和中线，因此，这就是一个十分自然的问题：这三条线各具有什么样的性质？

相信学生立即可以发现以下的结论：

结论一：由角平分线与对边的交点向其他两条边引垂线（如图 7－16），所得出的两条线段（图中的 DE 和 DF）相等；

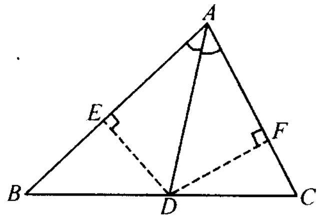


图 7－16

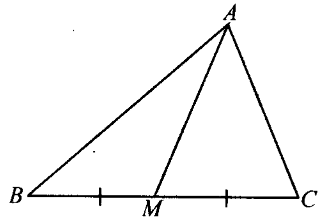


图 7－17

结论二：中线将三角形分成等积的两个部分（如图 7－17，$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$）。

进而，由结论二出发，我们又可提出这样的问题（这一问题显然具有一定的实际意义）：

如何由顶点 A 出发引一线段 AK 将原来的三角形 ABC 分成具有指定比例（例如，3∶2）的两个小三角形？

笔者以为，如果学生确已理解了上述的结论二，这时就不难找出以下的作法（图 7－18）。进而，在这一基础上，我们又可提出如下的问题：

如果指定的比值即为 $AB:AC$，我们又应如何去作？

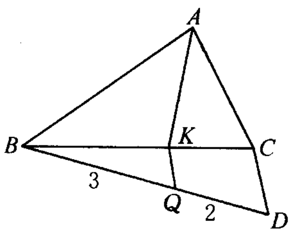


图 7－18

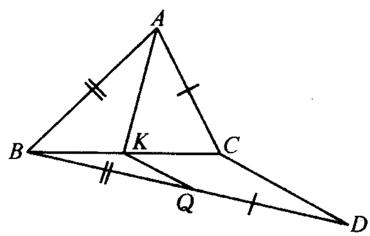


图 7－19

由于学生刚刚解决了前一个问题，这时往往也就会采取类似的作法（如图7－19）。但是，由于 AB 和 AC 都是现成的线段，因此，教师进一步提出如下的问题也就十分自然了：

我们能否对先前的作法加以改进，也即充分利用现有的图形？

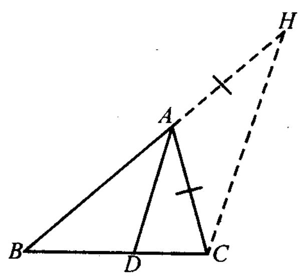


图 7－20

当然，我们在此所希望的即是出现如右图所示的图形（如图 7－20，其中 $AH=AC$，$HC/\!/AD$）。

最后，在进行了多次的实践之后，如果这时学生尚未

发现所作的 AD 就是原来的顶角 $\angle A$ 的平分线，这时教师就不妨有意识地引导学生对图 7－20 中各个角之间的关系进行分析。如：我们已经知道 AD 和 HC 是两条平行线，而平行线有很多性质，我们能否依据这些性质对图形中各个角的相互关系作出判断？

当然，在学生发现 AD 就是 $\angle A$ 的平分线以后，我们又应促使他们进一步去考虑：这一事实是否具有一定的偶然性？再则，这一事实是否有利于我们更为简单地去解决原来的问题，即由顶点 A 引出一条线段 AD 将原来的三角形分成这样两个部分，使它们的比就等于 $AB:AC$。

至此，主要结论的得出（也即“角平分线的性质定理”）应当说已经水到渠成了，而且所进行的探索活动也已为这一定理的证明做好了必要准备，因为我们在此所需的无非是将先前的思路逆转，即不是由 A 点去作 HC 的平行线 AD，而是由 C 点去作角平分线 AD 的平行线 CH。

显然，对照以上的作法去进行分析，这也就不能不说是上述教案的一个明显不足之处，即未能对 CE 这一辅助线的添加作出应有的交代。

最后，值得指出的是，遵循先前的思路，我们在此还可给出主要结论的又一证明，而其特点则是完全不用添加任何辅助线（应当指出，这事实上也就应当被看成创造性工作的一个主要特征，即敢于突破任何已有的框架）。

具体地说，为了证明 $AB:AC=BD:DC$（其中 AD 为角 A 的平分线），我们可以促使学生首先考虑 $BD:DC$ 的几何意义。由于先前我们一直在从事面积的分割，这时学生自然会想到 $BD:DC$ 就等于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积的比。这样，为了证明主要的结论，我们就只需进一步证明 $AB:AC$ 也等于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积之比。后一结论显然是不难证明的，因为，在此只需将 AB 和 AC 分别看成 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的底边，而由先前所获得的结果（结论一）我们已经知道这两个三角形的高（图 7－16 中的 DE 和 DF）是相等的。

从而，这事实上也就可以看成后一教学方法的又一优点，即将发现与证明的过程更为紧密地联系了起来。

【例 5】 与例 4 相同，以下关于“求点到直线的距离”的这一教案（载《名师授课录》高中版，上海教育出版社，1992）在很大程度上也可被看成数学方法论的一个自觉应用，因为，设计者所希望的即是能通过这一实例“使学生了解运用特殊到一般、一般到特殊的数学思想方法，使问题得到一般性解决的全过程，以启发思维、培养能力。”

具体地说，尽管学生在此“一般都能回答：过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为点 Q，PQ 就是点 P 到直线 l 的距离”（如图 7－21），教师对这一解决方法只是作了简单肯定，就立即把学生的注意力引导到了以下的问题：“求点 P 到直线 l 的距离，是否一定要从点 P 来求呢？如果点 P 的坐标的数据很复杂，有没有可能把它‘化简’，换成另

一个点?”进而,通过提出以下的问题:“请同学们想一想:两条平行线间的距离都相等吗?怎么求?”教师又引出了这样的结论:如果过点 P 作直线 $l' /\!/ l$,由于直线 l' 上的任意一点到直线 l 的距离都等于点 P 到直线 l 的距离(如图 7-22),因此,点到直线的距离就可归结为平行线之间的距离,这也就是说,“我们已经把求点 P 到直线 l 的距离转化为求两条平行线 l' 与 l 之间的距离”。

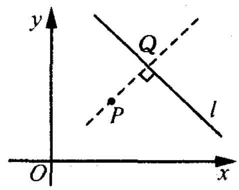


图 7-21

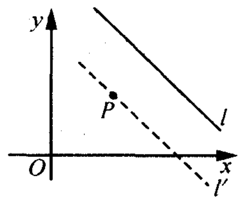


图 7-22

但是,我们又如何才能解决所说的求取两条平行线之间距离的问题呢?教师提出:“还是要取点,归结为点到直线的距离,只是点可以自由选取。”通过分别列举出平面上的点(记为 M)与两条平行线之间各种可能的位置关系(点在 l' 上;在 l 上;在 l 与 l' 之间;在 l 与 l' 的外侧),教师得出了这样的结论:“既然平面上任意取一点,都能算出两平行线 l 与 l' 之间的距离(设点 M 到直线 l 与 l' 的距离分别为 d 和 d',在上述的四种情况下,l 与 l' 这两条平行线之间的距离分别为 $d+0$;$d'+0$;$d+d'$;$d-d'$ 或 $d'-d$),那么取哪一点最好呢?当然是原点。”这样,我们最终就将问题归结成了“如何求取原点到已知直线 l 的距离”。

最后,作为对于后一问题的具体解决,教案中引入了直线的法线式方程;并通过教会学生如何将直线方程的一般式化为法线式,教师指出我们可利用法线式求得点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离。

由于上述的处理方法在很大程度上不同于现行的平面解析几何教材,因此,笔者以为,这事实上也就反映出相关老师对教材中的处理方法也是不很满意的;但是,现在的问题仍然在于:新的处理能否使相关的内容对学生而言真正成为“可以理解的”“可以学到手”和“能够加以推广应用的”?特别是,这又是否真正体现了“化难为易”和“化神奇为平凡”?坦率地说,笔者以为后两个问题是大可存疑的。

例如,笔者以为,只需对上述过程作出仔细的分析,而不是“让老师牵着鼻子走”,在教学过程中就一定会有学生提出这样的问题:我们在此是否可以任意地假设已经求得了平面上任意一点 M 到直线 l 与 l' 的距离?因为,后者难道不就是我们所要解决的问题吗,即希望能求得平面上任意一点到一条直线 l 的距离。这样,我们在此事实上就是绕了一个很大的圆圈又重新回到了原处,也即首先把“求点 P 到直线 l 的距离”转化成了“如何求得两条平行线 l' 与 l 之间的距离”,然后,为了求得 l' 与 l 之间的距离,则又必须假设可以求得平面上任意一点 M(从而事实上也就包括了点 P)到 l' 与 l 之间的距离。显然,如果我们已经求得了点 P 到直线 l 的距离,则又何必还

要绕这样大的一个弯子呢?!

当然,教案设计者之所以作出以上的处理主要是为了通过分别列举出平面上的点与两条平行线之间各种可能的位置关系就可引出这样的结论:我们在此可以首先求取原点到直线 l 的距离。但是,后一问题显然也可被看成所要解决的点到直线的距离这一一般性问题的一个特例(因为,原点也是平面上的一个点),从而,我们在此也就完全可以直接指明这样一个事实,并对有关的论述重新组织如下:与教案中突出强调"点到直线的距离"可以归结为"两条平行线之间的距离"这一作法不同,我们应将注意力主要集中于"为什么应当首先考虑上述的特殊情况?"进而,笔者相信,我们在此又不需作出任何特别的努力学生就会接受这样一个事实:过 P 作直线 $l'/\!/l$,我们只需分别求得原点到直线 l' 与 l 的距离,就立即可以求得点 P 到直线 l 的距离。容易看出,尽管这一新的处理方法在表面上似乎与原先的教案涉及相同的内容,但是,在新的处理下相应的思维过程显然得到了极大简化,并不再具有"弯弯绕"的味道。

最后,还应强调的是,就如上面所已提及的,教案中所设计的教学方法是在大部分学生已经发现了所面临的问题可以通过图 7－21 所示的方法(即首先通过点 P 作直线 l 的垂线,从而得出两条直线的交点 Q,再求得点 P 和点 Q 的距离)顺利地得以解决这一情况下进行的。由于后一解法是由学生主动得出的,从而对他们来说也就是"十分自然的",因此,完全可以想像,在所说的情况下要求学生完全放弃他们自己的解法(却又没有给出这样作的任何理由),并被迫去追随一种十分难以理解、而又似乎大可怀疑的作法,这无疑会造成严重的消极后果,后者又不仅是指对于具体数学内容的掌握,毋宁说,这也必然地会影响到学生对于数学这一学科、乃至对于自身数学学习能力的看法和信心。

综上所述,由于教案中所设计的方法事实上是将一个十分自然的思维过程变成了一个难以理解的苦果,因此,就数学方法论在教学实践中的应用而言,我们就不仅应当明确强调"化难为易"和"化神奇为平凡"这样的基本要求,而且也应注意防范由于对方法论原则的不恰当应用而造成相反的结果。特殊地,在笔者看来,我们也就应当从这样的角度去理解外国学者关于"数学启发法"的以下论述:如果解题者对于所要解决的问题一无所措,数学启发法可能会给你一定的启示;但如果解题者对于如何求解问题已经有了自己的想法,这时最为恰当的作法就是:让他按自己的方法去做!

最后,针对大多数学生的上述自然想法而言,笔者以为,我们在教学中又应切实注意这样一点:我们不应认为教材中没有采取某种作法,就认定学生所提出的解法"思路虽然很自然,但运算过程十分繁琐,从而实际上就是不可行的"。恰恰相反,由实际计算我们即可发现这一过程其实并不十分复杂(我们可以此为基础去引出直线的法线式方程,包括指明后者的几何意义)。从而,正确的立场就应是:"我们不应过分迷信教材,或者说,与所谓的'紧扣教材'相比,我们更应强调亲身的实践。"

三、实践中的创造

正如前面所已提及的，亲身实践应当被看成很好掌握与成功运用数学方法论的一个基本途径，特别是，如果自己在教学过程（更为一般地说，即是阅读数学教材或论著的过程）中发现某一内容的处理（包括教材中所采取的方法，别人给出的教例，以及自己先前所曾采用过的处理方法）不很自然，这或许就是自觉应用数学方法论来改进教学的一个很好的切入点，我们并可由此而获得关于相应的方法论原则、包括数学方法论的本质更为深入的认识，因为，归根结底地说，数学方法论并不是一门纸上谈兵、夸夸其谈、借题发挥的“空洞学问”，进而，作为一门实践性的学科，要看一个人是否真正掌握了数学方法论，也只有看他能否创造性地对此加以应用，即能否成功地以此为指导去解决所面临的具体问题。

例如，正如前面的例子所已表明的，辅助线的添加就可被看成这样的一个“切入点”，与此相仿的还有辅助函数的引入等。以下就是笔者在教学实践中的一个亲身经历——尽管相关的内容已经超出了初等数学的范围，但读者或许仍可从中获得一定的启示。

【例 6】 当时的教学内容是基本初等函数的导数，在弄清了线性函数、幂函数、正弦函数、余弦函数和对数函数的导数以后，余下的问题就是如何去求得指数函数 $y=a^x(a>0)$ 的导数。

教材上对此是这样处理的：

$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\,\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$,

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$。

现令 $(a^{\Delta x}-1)=t$，则 $\Delta x=\log_a(1+t)$；又，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta t\to 0$，于是就有：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log a(1+t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a。$$

因此　$y'=a^x\ln a$。

对上述过程进行分析，容易看出，其中的关键一步在于引进了 $t=a^{\Delta x}-1$ 这样一个辅助函数。但这一步是怎样想出来的呢？我们又怎样才能使其对于学生来说成为“可以理解的”和“可以学到手的”呢？

在实际教学中，笔者是这样做的：

得出 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 这个表达式后，教师似乎“忘记”应当如何引进 t

这个新的变量，这样，面前的问题就成了一个真正的挑战！而且，教师最初的两次尝试都失败了——从而，这就引起了学生们的极大兴趣：全班学生都提起了精神看教师将如何处理这一难题。

这时，教师放弃了盲目追随教材的作法，而是开始了“新”的思考：“让我们来看一下什么是已经解决了的，特别是，什么与目前所面临的问题是密切相关的。”

显然，这时容易想到以下的事实：

对数函数的导数$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$，

因为，指数函数可看成对数函数的反函数。

正是通过这样的分析，教师提出了这样的想法：“我们能否暂时‘放弃’眼前的问题，而从更为一般的角度去考虑以下的问题：‘已知一个函数的导数，如何去求得它的反函数的导数？’”

显然，从纯形式的角度看，这一问题是容易解决的，即有：反函数的导数等于直接函数的导数的倒数。

进而，将上述的一般性结论应用于指数函数这一“特例”，我们也就可以立即获得以下的结果：

$$(a^x)'=\frac{1}{\log_a y'}=\frac{1}{\frac{\log_a e}{y}}=a^x\ln a。$$

这样，原来的问题就获得了解决。

笔者看来，尽管以上的作法脱离了教材，甚至也违背了教材的“逻辑顺序”，但却使学生看到了真正的数学活动，特别是，以上的解题活动对于学生深刻领会“一般化方法”是十分有益的。这也就如希尔伯特所指出的，“在解决一个数学问题时，如果我们没有获得成功，原因常常在于我们没有认识到更一般的观点，即眼下要解决的问题不过是一连串有关问题中的一个环节”。

【例7】 以下的例子是由张景中院士提供的，而且，与前面的各个实例一样，这一例子也直接源于改进教学的思考，即为了帮助学生更好地理解与记忆“和角公式”：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

如图7-23，记$\angle BAD$为α，$\angle DAC$为β，$AD=m$，并设$AD\perp BC$.

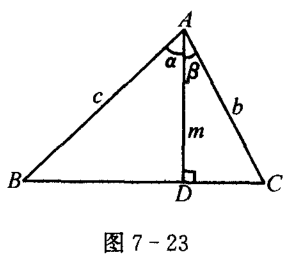


图7-23

由平面几何的相关知识可以知道：$S_{\triangle ABD}=cm\sin\alpha$，$S_{\triangle ADC}=bm\sin\beta$，$S_{\triangle ABC}=bc\sin(\alpha+\beta)$。

由于$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$，

代入就有$bc\sin(\alpha+\beta)=cm\sin\alpha+bm\sin\beta$。

两边同除以bc可得：$\sin(\alpha+\beta)=\frac{m}{b}\sin\alpha+\frac{m}{c}\sin\beta$，

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

显然，由这一例子我们也就可以更好地体会张景中院士所大力倡导的“面积法（等积法）”的力量（本节例4所给出的后一种解法事实上也可看成“面积法”的又一实例。对此可见张景中，《平面几何新路》，四川教育出版社，1994）。值得指出的是，尽管笔者并不十分了解张景中院士产出相关想法的真实思想过程，但是我们也可通过“方法论重建”清楚地指明这一想法的合理性。

【例8】 具体地说，正如人们所熟知的，在学习平面几何的初期，三角形的全等可以被看成求解各个相关问题的一个重要工具，因为，依据三角形全等的判定法则，我们只需依据两个三角形中有三组对应元素（其中至少一边）分别相等，就可立即判定这两个三角形是全等的，从而也就由其中一个三角形的各个已知元素去求得另一三角形中的对应元素。

但是，由于三角形的全等是一个很强的要求，上述的方法在很多情况下就并不适用。因此，我们自然也就会想到：能否对这一方法适当地加以减弱，从而就可在更多的场合加以应用？

众所周知，就通行的教材而言，其中所普遍采取的即是由三角形的全等过渡到了三角形的相似，这样三角形的相似就逐渐取代三角形的全等而成为了一种更为有效的解题工具；但是，由于图形的全等即可被理解为“面积相等”加上“形状相似”，上述的发展则是完全放弃了“面积相等”的要求而惟一集中于“形状相似”的考虑，因此，从纯逻辑的角度去分析，我们在此也就可以、而且应当积极地去探索另外一种可能性，即完全放弃“形状相似”的要求而惟一集中于“面积相等”的考虑：

$$\text{全等形}\begin{cases}\text{形状相似——“相似法”}\\ \text{面积相等——“面积法(等积法)”}\end{cases}$$

显然，从这样的角度去分析，面积法的产生也就十分自然了。进而，我们在此可以立即得出这样的猜想：有很多传统的平面几何难题用“面积法”去求解可能会变得十分容易（更为广义地说，例7也就可以被看成这样的一个例子）；当然，也会有这样一些问题，用“面积法”去求解可能不很容易但用相似形去求解则就容易得多。从而，总的来说，在“相似法”与“面积法”之间也就可以被认为存在有相互补充的关系。

综上所述，只要我们把数学方法论在教学中的应用真正看成创造性的工作，并切实做到“化难为易”“化神奇为平凡”，数学方法论就的确可以帮助我们极大地改善自己的教学工作，那种关于强调数学思维方法是否会影响数学知识和技能的教学的担心也是完全不必要的。

最后，还应强调的是，从更为深入的层次看，能否自觉地以数学方法论去指导具体数学知识内容的教学并就关系到了数学教育的根本目标。这就是指，相对于具体数学知识内容的学习而言，思维的训练应当说更为重要，从而，我们也就应当把帮助学生学会数学地思维作为数学教育最为重要的目标之一。

也正是基于这样的认识，笔者愿意引用“国际数学教育委员会(ICMI)研究丛书”之一《数学与认知》这一著作中的两段话作为这一部分的结束，因为，尽管这两段话并不完全局限于数学方法论的范围，而是涉及所谓的“数学行为”，也即数学家的各种具体活动，但其基本的主张显然是与我们完全一致的：

“这些工作所涉及的……是如何像数学家那样去工作……如何构造一个证明或反例，如何选择一个一般性的例子，如何使定义精确化，等等，这些诀窍并不是任何课程的明显内容，但如果对它们缺乏认识与理解，学生便注定只能低层次地模仿教师……”

“人们普遍地认识到诸如形象化、解题策略和各种表征之间的关系等论题有一定的问题，而造成这种现象的原因就在于它们一直被认为是可以自动地学会的，但我们现在知道，在教学和学习的过程中必须明确地对此予以注意。对于这些应当明确地去教，但又不是作为一个单独的课题，而是渗透于整个课程之中，也即渗透于各个课题之中。”

第二节　努力培养学生提出问题的能力

第6章中已经提及，“问题解决”这一国际性的数学教育改革运动的一个明显不足之处，就是惟一地集中于如何去求解所面对的问题，而未能对“问题提出”予以同样的重视。以下就联系素质教育、特别是学生创新意识的培养对努力培养学生提出问题能力的重要性作出进一步的分析；另外，在这一节中我们还将对国外的一些相关研究作出简要介绍——这显然也应被看成数学方法论研究的又一重要内容；最后，我们还将通过两个教学实例对如何在这一方面更好地做到方法论的学习和研究与实际教学活动的密切结合作出具体说明。

一、创新与数学教育

以下是几年前在中国和美国部分省区间进行的一项比较研究的一道试题，有兴趣的读者不妨试一试。[18]

试就图7-24所示的情景提出三个数学问题，要求一个较为容易，一个较难，另一个则难度适中。

怎么样？你是否已经顺利地解决了这一问题？共用了多少时间？

如果你做得不很顺利的话，那就一定会对以下的事实感到大吃一惊：这事实上

[18] 这一材料是由贵州师范大学吕传汉副校长向笔者提供的，特此表示诚挚的谢意。

是对小学四年级学生所作的一次测试。具体地说，这次测试共包括两个部分：第一部分要求学生按照所给出的情景（共有三个情景，图 7－24 是其中之一）分别提出易、

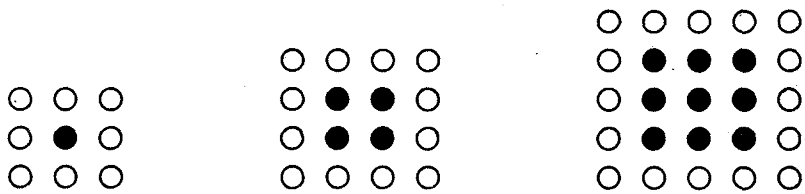


图 7－24

中、难三个数学问题，但不需要求解；第二部分则要求学生实际地求解试卷中根据特定情景所已直接给出的两个数学问题。结果表明，美国学生普遍地感到第二部分难于第一部分；对于中国学生来说却是相反的情况，第二部分对他们来说似乎没有任何困难，但面对第一部分试题他们却显得完全不知所措。试验者事后又对中国的中学生、甚至是大学生进行了同样的测试，结果也出现了同样的情况。

由此可见，中国学生与美国学生相比，中国学生较缺乏提出问题的能力。

但是，难道我们在此不也可以说中国学生比美国学生具有更强的解决问题的能力吗？对于后一结论我们暂且不作定论，而只是想重复这样一点：与解决问题的能力相比，提出问题的能力即使不说更为重要，至少也是同样重要的。另外，又如第 6 章中已提及的，这事实上也就是波利亚的数学启发法研究的一个明显弱点，即只是注意了“问题解决”，而未能给予“问题提出”同样的重视——更为广泛地说，这也正是“问题解决”这一曾在 20 世纪 80 年代风靡全球的数学教育改革运动的一个不足之处。

为了更清楚地说明问题，在此还可联系数学教育由“应试教育”向“素质教育”的转变对于培养学生提出问题能力的重要性作出进一步的分析。

众所周知，我国的教育事业现正经历着由“应试教育”向“素质教育”的重要转变，而学生创新精神（以及实践能力）的培养则就构成了素质教育的重点。但是，我们又应如何去理解所说的“创新精神”呢？或者说，究竟什么是“创新精神”的主要内涵呢？

鉴于本书的论题，我们在此不可能对后一问题作出全面的分析，但是前面的分析显然已经表明：对于所说的“创新”我们不能惟一地理解成“问题解决”，不然的话，就会造成十分严重的后果。例如，如果认为“从本质上说，创造就是困难问题的解决过程”，在教学（包括考核）中我们就必然地会突出强调问题的“新颖性”，如在高考中“创设一定数量的新颖情境的试题”，努力“开发新的题型”，等等。但是，后一种做法显然也是与“应试教育”彼此相容的，从而，在现实中这一作法就十分容易导致这样的倾向，即是将学生“创新精神”的培养简单地等同于如何在教学中积极去设置各种“新颖”的问题，另外，就考核而言，则就更加容易造成“题海战术”的进一步升级与扩展。

显然，上述分析也就更为清楚地表明了正确理解“创新精神”的重要性，特别是，与惟一强调问题的“新颖性”相比，我们应当更加突出学生在学习活动中的“自主性”和思维的“开放性”。另外，也正是从这样的角度去分析，笔者认为，题型的改变（特别是，“开放题”的引进）就不能被看成培养学生创新精神的惟一途径，毋宁说，这里的关键仍然在于如何彻底地去改变学生在学习过程中的被动状态，并能更为积极、主动地去进行学习。

特殊地，由于提出问题的能力集中地体现了学生的主动探索精神与思维的开放性，因此，从这样的意义上说，努力培养学生提出问题的能力正是素质教育、特别是培养学生创新精神的必然要求。

二、提出问题的策略

提出问题的策略 由于人们现已较为普遍地认识到了“问题提出”的重要性，因此，就如波利亚关于解题策略的研究，一些研究者也从方法论的角度对于“提出问题的策略”进行了积极的研究。以下就是美国学者 S. 布朗与 M. 沃尔特在其合作的一部专著《提出问题的艺术》中所给出的一种策略。

具体地说，布朗与沃尔特提出，以下的一些法则则被看成提出问题的一般性策略：

第一，确定出发点，这可以是已知的命题、问题或概念等；

第二，对所确定的对象进行分析，列举出它的各个“属性”；

第三，就所列举的每一“属性”进行思考：“如果这一‘属性’不是这样的话，那它可能是什么？”

第四，依据上述对于各种可能性的分析提出新的问题；

第五，对所提出的新问题进行选择。

由于上述的第三步可以被看成这一策略的核心所在，即就对象的各个“属性”具体地去考虑：“如果它不是这样的话，那又可能是什么？”因此，这一方法就被称为“否定假设法”（“What if not……”）。

以下就通过一个实例来对“否定假设法”作出具体说明。

【例 1】 毕达哥拉斯定理（勾股定理）是人们十分熟悉的，我们就以其作为出发点来提出新问题——这就是上述过程中的第一步。

对于所说的第二步和第三步可以同时实行如下：

“属性一”：这是一个定理。试问：如果这一命题不是定理，那它可能是什么？

例如，在此即可举出以下的一些可能性：

（1.1）这是一个定义；

（1.2）这是一个公理；

(1.3) 这一命题可能为假，即 $a^2+b^2\neq c^2$。

“属性二”：这一定理所涉及的是三角形三条边的长度。试问：如果它所涉及的不是三角形三条边的长度，则又可能是什么？

例如，在此即可列举出以下的一些可能性：

(2.1) 可以讨论边长的一半；

(2.2) 可以讨论三边的各种投影；

(2.3) 可以讨论三边的方向。

“属性三”：这一定理所涉及的是一个直角三角形。试问：如果所涉及的不是直角三角形，则还可能是什么？

在此即有：

(3.1) 可以是锐角三角形；

(3.2) 可以是钝角三角形；

(3.3) 可以是其他图形，如正四边形。

“属性四”：这一定理所涉及的是面积。试问：如果不是面积，则又可能是什么？

例如，在此显然有：

(4.1) 可以考虑体积；

(4.2) 可以考虑其他更高(或更低的)维数。

“属性五”：这一定理所涉及的是边上的正方形。试问：如果不是正方形，则有什么可能性？

例如，在此显然有：

(5.1) 可以考虑边上的矩形；

(5.2) 可以考虑边上的正三角形；

(5.3) 可以考虑边上的正多边形；

(5.4) 可以考虑边上的其他图形。

“属性六”：毕达哥拉斯定理所涉及的是三个变量。如果不是三个变量，则有什么样的可能性？

以下就是一些新的可能性：

(6.1) 可以考虑四个变量，即如 $a^2+b^2=c^2+d^2$；

(6.2) 可以假设只有两个变量，即如 $a^2=b^2$；

(6.3) 可以假设有三个变量和一个常量，即如 $a^2+b^2=c^2+n$；

(6.4) 可以假设有两个变量和一个常量，即如 $a^2+b^2=n$。

“属性七”：定理中的变量是用等号连结起来的。如果不是等号，则有什么样的可能性？

以下是一些新的可能性：

(7.1) 变量是用不等号“>”连结起来的，即有 $a^2+b^2>c^2$；

(7.2) 变量是用不等号“<”连结起来的，即有 $a^2+b^2<c^2$；

(7.3) 变量是用不等号“≥”连结起来的，即有 $a^2+b^2\geqslant c^2$；

(7.4) 变量是用除号连结起来的，即如(a^2+b^2)可以被 c^2 所整除；

(7.5) a^2+b^2 与 c^2 互质；

(7.6) a^2+b^2 与 c^2 相差一个常数。

“属性八”：定理中有一个加号。试问：还有什么可能性？

以下就是一些新的可能性：

(8.1) $a^2-b^2=c^2$；

(8.2) $a^2\cdot b^2=c^2$；

(8.3) $(a^2)^{b2}=c^2$；

(8.4) $\frac{a^2}{b^2}=c^2$。

“属性九”：定理中的指数都是平方。以下则是一些新的可能性：

(9.1) $a^3+b^3=c^3$；

(9.2) $a^4+b^4=c^4$；

(9.3) $a^5+b^5=c^5$。

“属性十”：定理中的指数都是正整数。以下就是一些新的可能性：

(10.1) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$；

(10.2) $a^{-1}+b^{-1}=c^{-1}$；

(10.3) $a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{2}}=c^{\sqrt{2}}$。

“属性十一”：定理中所有的指数都是相等的。以下则是一些新的可能性：

(11.1) $a+b^2=c^2$；

(11.2) $a^2+b^2=c^3$；

(11.3) $a^2+b^3=c^5$；

(11.4) $a^2+b^2=c$。

进而，针对以上所列举出的各种情况，我们显然又可提出各种可能的问题——这就是上述的步骤四。

例如，针对以下的关系式：

(7.1) $a^2+b^2>c^2$，

我们就可提出这样一些可能的问题：

(1) 这一关系式是否具有几何意义？

(2) 对于哪些自然数这一关系式为真？

(3) 对于哪些自然数 a^2+b^2 与 c^2 相差一个确定的常数，例如1？

(4) $a^2+b^2>c^2$ 的图象是什么？

一般地说，作为问题的可能类型，《提出问题的艺术》中给出了如下的“问题表”：

问题表

这是否是一个公式?
这个公式有什么用?
这一公式何时为真? 何时为假?
它的最大值是什么?
它的最小值是什么?
解答的范围是什么?
其中是否存在某种模式?
是否有反例存在?
能否对此加以推广?
这是否存在?
这是否有解?
你能否求得解答?
能否对其中的信息加以压缩?
你能否制成一个表?
你能否对此进行证明?
它是否为常数?
其中何者为常数,何者为变数?
它是否依赖于某个变量?
是否存在极端的情况?
它的范围是什么?
是否存在某种统一的结论?
这是否相关?
我们是否不自觉地加上了某种限制?
什么时候这是相关的?
它提示了什么?
在发现"毛病"时应当如何去进行补救?
如何从几何的角度去进行分析?
如何从代数的角度去进行分析?
如何从分析的角度去进行研究?
其中包含什么样的共同点?
为了证明它,应当做什么?
其中的关键是什么?
其中关键性的制约条件是什么?
通过考察具体的数据能得到什么启示?

它与其他的公式(问题等)有什么联系?

综上所述,利用"否定假设法"我们就可引出大量的新问题,特别是这一方法的应用不应被看成一次就可得以完成的简单过程,毋宁说,在此存在有不断深化和发展的可能性,因为,在获得了若干新问题以后,我们显然又可以这些新问题作为出发点并再次应用"否定假设法"去引出更多的新问题,而这一过程可以无限制地继续下去。

也正因为此,在应用"否定假设法"去引出新问题时,我们就应当特别重视对于各个可能的新问题的评价和选择——这正是上述的步骤五。或者说,这就应被看成提出问题能力的一个重要内涵:我们在此所需要的并不是无一遗漏地去列举出各种可能的新的问题(由以上的分析可以看出,后一目标也是不可能实际达成的),而是如何能够提出好的、有价值的问题。

"好"的问题的标准 但是,究竟什么是所说的"好的、有价值的问题"呢?从教育的角度看,对于相应的标准可以大致归结如下:

第一,具有较强的探究性。这也就如波利亚所指出的:"我们这里所指的问题,不仅是寻常的,它们还要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造精神。"

当然,这里所说的"探究性"又应是与学生实际水平相适应的。这也就是说,一个好的问题尽管有一定的难度,但是,对于大多数学生来说这又并非是"高不可及的"。

也正是基于这样的认识,一些学者提出,一个好的问题应是(学生)"力所能及的"。

第二,具有一定的启示意义。这也就是说,好的问题应当有利于学生掌握相关的数学知识和思想方法。

显然,按照这一标准,我们在教学中就应明确反对各种所谓的"怪题""偏题",包括在课堂上提出一些十分"做作"的问题,以及花费很大的力量去求解那些需要用到某些并不具有普遍意义的怪招的问题,等等。

更为一般地说,这事实上直接涉及"问题解决"与数学基础知识与基本技能的学习这两者之间的关系,正如第6章中所已指明的,我们既不应以"问题解决"去取代基础知识和基本技能的教学,也不应完全脱离具体的教学内容去进行数学方法论的教学。恰恰相反,我们应以思想方法的分析带动具体数学知识内容的教学,并真正促进学生对于数学基础知识和基本技能的掌握。

第三,具有多种不同的解法,甚至多种可能的解答。

更为一般地说,这也就是指,一个好的问题应当具有较大的"开放性",而又正如人们所已普遍认识到了的,这对于培养学生的创新精神是十分有益的。

第四,具有一定的发展余地。这就是说,由好的问题可以引出新的问题和进一

步的思考。

显然，这事实上也就可以被看成前述关于“问题提出”重要性的一个直接结论。

第五，具有一定的现实意义，或与学生的实际生活有着直接的联系，从而就可使学生感到数学是一种有意义的活动，也即能够更为清楚地认识数学的价值。

第六，考虑到合作学习这一学习形式应当得到更多的重视和提倡，一个好的问题就应鼓励、促进同学之间的合作。

值得指出的是，这一标准事实上也就直接关系到了现代教育的一项基本目标，因为，这正是社会对于未来成员的一个基本要求，即应学会与别人相处，特别是能够容忍不同的意见，并能欣赏别人，从而就能够通过积极的互动不断地取得新的进步。

第七，问题的表述应当简单易懂。这也就如著名数学家希尔伯特所指出的，“这里对数学理论所坚持的清晰性和易懂性，我想更应以此作为一个堪称完善的数学问题的要求”。

当然，从教育的角度看，我们在此又应特别注意从学生的角度去进行分析，即应当融入学生的生活语言、他们所熟悉的生活现象和事物等。

应当强调的是，以上所列举的七条标准显然不可能在每一个问题中都得到充分的体现。另外，从更高的层次去分析，所谓问题的“好”与“坏”事实上也只具有相对的意义，即是因人、因时、因地而异的(也正因如此，一些学者提出了“问题的美学”这样一个概念。对此可参见第 3 章中的相关论述)。但是，以上所列举的各条标准毕竟又体现了努力的方向。

以下再给出这方面的一个具体例子。

【例 2】 在一个游戏中，参与者被要求向一个类似于(国际)象棋棋盘的方格盘投掷硬币。如果钱币接触到了某一方格的边界，游戏者就输了；如果钱币滚出棋盘，游戏重新开始；如果钱币完全落在某个方格的内部，就是游戏者获胜。现问：在这一游戏中获胜的几率有多大(图 7 - 25)？

容易看出，这一问题具有以下一些特点：

(1) 这是一个具有真实意义的问题，也即是与学生的实际生活直接相联系的。

(2) 为了解决这一问题需要综合应用源自不同数学分支的概念与方法，包括概率、几何、解析几何等。

(3) 这一问题具有多种不同的解决方法，包括采用实验方法和用计算机进行模拟。

(4) 从这一问题可以引出很多有趣的问题和有益的方法。

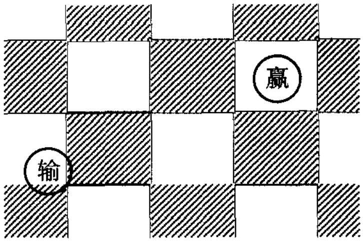


图 7 - 25

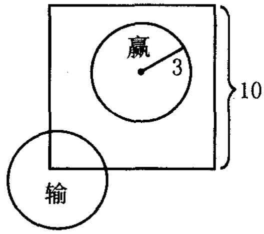


图 7 - 26

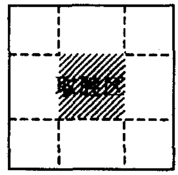


图 7 - 27

例如，一群八年级的学生在求解这一问题时首先采取了特殊化的方法，即具体地考察了硬币的半径为 3 厘米、方格的边长为 10 厘米的情况(如图 7 - 26)。这时为了取胜，钱币的中心必须至少距方格的每一条边 3 厘米。从而，对于每一个方格我们就都可作出“取胜区”和“失败区”的划分(图 7 - 27)；进而，通过两者面积的计算，我们就可得知：在所说的情况下获胜的几率为$\frac{(10-2\times3)^2}{10^2}=\frac{4}{25}$。

其次，通过一般化，我们就可获得如下的普遍结论：设钱币的半径为 R，方格的边长为 S，在这种情况下，取胜的几率为$\frac{(S-2R)^2}{S^2}$。

进而，作为进一步的发展，学生们又给自己提出了这样的问题：为了使这一游戏成为“公正的”(取胜和失败的几率都为$\frac{1}{2}$)，所采用的硬币的半径应是多少？

通过求解以下的方程：

$$\frac{(S-2R)^2}{S^2}=\frac{1}{2},$$

学生们得出了这样的结论：这时钱币的半径应为 1.46 厘米。

为了检验上述结论的正确性，学生们分别用实验和计算机模拟对此进行了验证。

最后，学生们又提出了更多的新的问题，诸如：

假设方格盘上的格子交替地涂成红色和白色，又只有落入红色的格子之内才能算获胜，这时取胜的几率是多少？

假设“棋盘”是由正六边形而不是由正方形组成的，六边形的边长为 20 厘米，硬币的半径为 7 厘米，这时取胜的几率有多大？

如果采用的钱币的半径为 10 厘米，采用正方形“棋盘”和采用正六边形“棋盘”有什么不同？

就原来的问题而言，在取胜的几率大于$\frac{1}{2}$的情况下，在正方形的边长与钱币的半径之间有怎样的关系？

为了求解以上的问题，学生们共花费了几天的时间，但这对于他们提高解决问题的能力，特别是创新能力显然十分有利。

三、从教学的角度看提出问题的意义

【例 3】《数学教学通讯》2000 年第三期发表了刘京莉老师的文章“在数学课中培养创新意识”，对她在日本参观过的一堂名为“从原问题创作出新问题”的数学课进行了介绍。

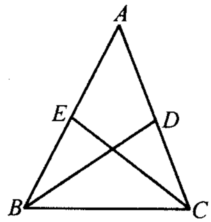


图 7-28

具体地说，教师在此首先给出了以下的问题（称为“原问题”）：在等腰三角形 ABC 中，D，E 分别是 AC，AB 的中点（图 7-28），求证：$BD=CE$。

其次，在学生们具体地完成了原问题的证明以后，教师又要求学生以此为基础去“创作新问题，可以先不证明”。为了给全班学生打开思路，教师请三位同学首先发表了自己的看法。以下就是这三个学生创作的新问题：

问题一

已知：在等腰三角形 ABC 中，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线分别交 AC 于点 D，AB 于 E。

求证：$BD=CE$。

问题二

已知：在等腰三角形 ABC 中，D，E 分别是 AC，AB 的中点。

求证：$\angle DBC=\angle ECB$。

问题三

作长方形 $ABCD$ 的两条对角线并交于点 O。

求证：$AC=DB$。

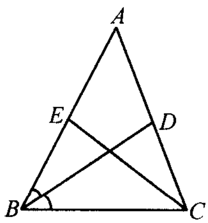


图 7-29

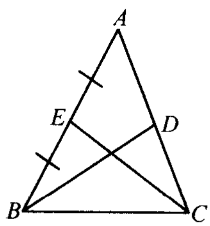


图 7-30

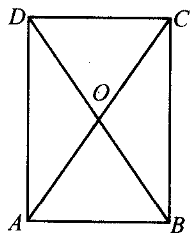


图 7-31

结果，在随后的练习中，全班 40 人共创作出了 84 道题，其中可以证明的（即结论为真的）有 28 道.

刘京莉老师写道：“学生在交流过程中，对自己能创作这么多新问题感到非常吃惊、非常兴奋，通过分类和整理，同学们加深了对图形、证明、分类标准的多样性的理解，体验了发展创新的思维方式……”最后，刘京莉老师又强调指出，“在数学课上‘从原问题创作出新问题’，不仅是培养学生的创新意识的途径之一，还有以下几点作用：第一，不论是谁都能创作新问题；第二，激发学生学习数学的兴趣；第三，能让学生体会到发现的愉快感；第四，这种类型的数学课还可以从多个方面进行评价；第五，如果使用作图软件，在计算机画面上能更有效作出新问题”。

刘京莉老师的上述分析是很有道理的。然而，在此需要强调的是：这一文章中所提及的很多例子事实上都可被看成前面所介绍的“否定假设法”的实际应用。从而，在笔者看来，这一例子事实上也就十分清楚地表明了这样一点：如果我们在此能够自觉地以方法论作为指导来进行教学，就可取得更为理想的教学效果，特别是，可更为有效地去帮助学生掌握提出问题的方法。

具体地说，如果就以刘文中所给出的“原问题”(如图 7 - 28)作为使用“否定假设法”的实际出发点，对于前述的“否定假设法”中的各个步骤我们就可同时实行如下：

“属性一”：原问题中所涉及的是等腰三角形两腰上的中线，如果不是中线的话，那又可能是什么？

容易看出，按照这样的思路，以下两个问题(图 7 - 32、图 7 - 33)的提出就十分自然了(“问题 A”就是上述的“问题一”；以下所列举的其他各个问题也都取自刘京莉老师的文章，只不过对此重新进行了组织和编号)：

问题 A

已知：在等腰三角形 ABC 中，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线分别交 AC 于 D，交 AB 于点 E。

求证：$BD=CE$。

问题 B

已知：在等腰三角形 ABC 中，BD，CE 分别是 AC，AB 边的垂线。

求证：$BD=CE$。

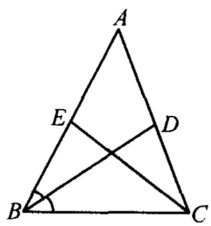


图 7 - 32

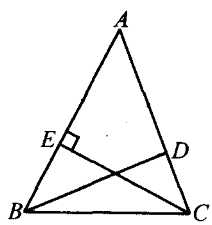


图 7 - 33

另外，如果进一步拓宽思路的话，我们显然又可以提出以下的问题(图 7 - 34、图 7 - 35、图 7 - 36)：

问题 C

已知：在等腰三角形 ABC 中，$AD=AE$，连结 BD，CE。

求证：$BD=CE$。

问题 D

已知：在等腰三角形 ABC 中，BD，CE 分别是 CA，BA 延长线的垂线。

求证：$BD=CE$。

问题 E

已知：在等腰三角形 ABC 中，BD，CE 分别是 AC，AB 边的中线，并从 B，C 点分别作 AD 和 AE 的中线 BF，CG。

求证：$BF=CG$。

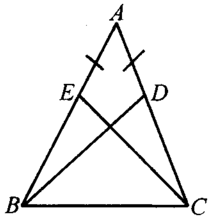


图 7－34

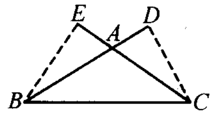


图 7－35

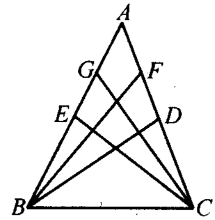


图 7－36

“属性二”：原问题中所要求证的是两腰上的中线相等，如果不是这样的话，那又可能是什么？

显然，以下两个问题的提出（图 7－37、图 7－38）就可看成按照这样的思路进行思考的结果：

问题 F（这就是原来的问题二）

已知：在等腰三角形 ABC 中，BD，CE 分别是 AC，AB 的中线并交于点 F。

求证：$\angle DBC=\angle ECB$。

问题 G

已知：在等腰三角形 ABC 中，BD，CE 分别是 AC，AB 的中线并交于点 F。

求证：$\triangle BCF$ 是等腰三角形。

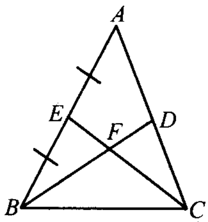


图 7－37

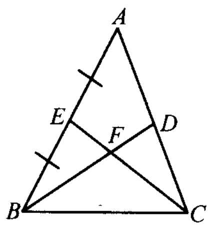


图 7－38

“属性三”：原问题中所涉及的图形是等腰三角形，如果不是这样的话，那又可能是什么？

不难看出，在一定意义上，以下两个问题（图 7－39、图 7－40）就可看成按照这样的思路得以提出的：

问题 H（这就是上述的问题三）

在长方形 $ABCD$ 中作两条对角线，相交于点 O。

求证：$AC=BD$。

问题 I

在正方形 $ABCD$ 中，从 D 点分别引 AB，BC 的中线 DE，DF。

求证：$DE=DF$。

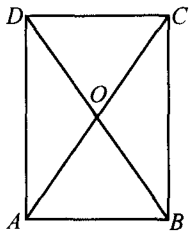


图 7-39

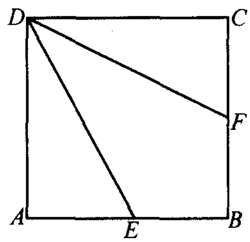


图 7-40

综上所述，方法论的研究对于实际的教学活动就确实具有一定的指导意义。另外，在笔者看来，以上的实例事实上也就更为清楚地表明了努力提高学生提出问题能力的重要性和紧迫性，不然的话，我们就会在未来的国际竞争中处于劣势。

【例 4】 以下实例尽管所涉及的仅仅是教师在课程上的"提问"(第一节中的例 4 和例 5 也都可以看成这样的实例)，但这显然也应被看成努力培养学生提出问题能力的一个重要方面，因为，如果我们的教师在课堂上的提问并非十分适宜，这无疑就会对学生提出问题能力的培养产生十分消极的影响，特别是，这更应被看成课堂提问"适宜性"的一个重要标准，即应当"合乎情理、力求自然"，从而才能真正有利于帮助学生学会"数学地思维"。

具体地说，这是《中学数学教学参考》2000 年第三期所刊登的一个课例："余弦定理(第一课)。"

由于勾股定理是学生们已经掌握的一个知识，因此，从方法论的角度分析，在余弦定理的教学中，我们显然就应突出强调直角三角形与一般三角形之间的关系，或者说，应将以下的问题贯穿于全部的课程：

"我们已经知道了直角三角形三条边之间的关系，那么，在一般三角形的三条边之间又存在什么样的关系呢?"

进而，在对上述问题进行探索时，我们显然又应考虑：

"是否就可利用已有的知识，即勾股定理来解决所面临的新问题?"

从所发表的课例看，相关的老师无疑也清楚地意识到了在直角三角形与一般三角形之间所存在的重要联系。但是，为了帮助学生具体地去"发现"余弦定理，在对勾股定理进行回忆以后(特别是，在具体地给出了 $a^2=c^2-b^2$ 这一关系式以后)，课例中却设计了这样一个问题(如图 7-41)：

"在直角三角形中，若已知 b，c 和 $\angle A$，怎样用它们去表示直角边 a?"(*)

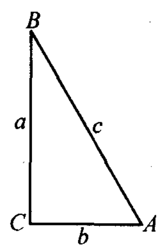


图 7-41

当然，课例设计者在此所希望的即是能由此而引出以下的表达式：

$a^2=c^2-b^2=c^2+b^2-2b^2=c^2+b^2-2bc\cos A$；

进而，通过验证相应的关系式对于其他两条边也是成立的，从而就可为“学生深刻理解和掌握余弦定理”做好“必要的铺垫”——后者就是指，学生能由上述关系式在直角三角形中“普遍”成立猜测出“这一规律在斜三角形中也是成立的”。

对于上述的教学设计有关的点评者作出了如下的点评：“教师恰当的点拨：构造平方和、引入角 A，顿时起到峰回路转、柳暗花明的作用，怎能不引起学生的共鸣！”但是，笔者以为，如果我是一个学生，就实在不能理解教师在此为什么会提出上述的问题(*)，因为，在已知勾股定理的情况下，用 b,c 即可表示出直角边 a，为什么又要进而去研究如何用 b,c 和 $\angle A$ 去表示直角边 a 呢？这难道不是无故地节外生枝，事实上就是化简为繁吗？或者说，这一问题在很大程度上也可被看成波利亚所说的“从帽子里掏出来的一只兔子”！

为了更清楚地说明问题，我们在此还可换一个角度来进行思考。试问：如果教师不是事先已经知道了余弦定理，是否还会提出这样的问题？或者说，您是否真的相信：有任何人会通过这样的“设问”在事先不知道余弦定理的情况下发现(或重新发现)这一定理？

当然，面对上述的责疑，我们在此似乎也可作出这样的“辩护”：这里所作的难道不就是前面所说的“方法论重建”吗！但是，笔者认为，这样的“设问”实在是太不合情理、太不自然了！从而，与我们所期望的通过方法论的分析能使相关内容对于学生而言真正成为“可以理解的”“可以学到手的”和“能够加以推广应用的”这一目标相反，学生这时必然会因为深感“困惑”而放弃主动的探索，并简单地采取“跟着老师走”的策略；进而，如果这样的情况在教学中再三地重现，那么，最终就必然会出现这样的场面：在遇到新的问题时，学生将习惯于等待教师来“点拨”，包括按照教师的提示进行纯形式的运作(即如将 $a^2=c^2-b^2$ 改写成 $c^2+b^2-2bc\cos A$)，并按照教师的“暗示”(即如“在得出这一规律以后——即是指，在直角三角形中，任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍——你想到了什么?”)来作出“猜测”。从而，尽管这时在教学中或许仍可经常看到“学生的共鸣”，但后者事实上却又只是一种纯粹被动的“回声”(或者说，“剧场效应”)，因为，这种反应并不包含有任何的主动性和创造的成分！

由此可见，作为搞好教学的重要一环，设问必须合乎情理，力求自然。另外，就余弦定理的教学而言，我们则又应当明确地肯定这样一点：由于余弦定理显然可以被看成勾股定理的直接推广，因此，我们在此就应尽可能地利用勾股定理来证明余弦定理，而这显然也可以帮助学生更好地去理解“特殊化”这一重要的思维方法和解题策略。

值得指出的是，由笔者看来，这一教案之所以会采取所提及的“不自然”思路，很可能与以下两个原因有着直接的关系：

第一，“紧扣教材”。因为，在现行的教材中，余弦定理是用坐标法、而并非利用

与直角三角形的联系得到证明的。但是，笔者认为，即使在教学中我们应当与教材有所呼应，但也仍然可以首先用后一方法对余弦定理作出证明，然后再引导学生去考虑以下的问题：除去所使用的“综合法”以外，我们能否用其他的方法对余弦定理作出证明？

特殊地，笔者以为，也就只有通过这两种方法的对比，我们才能帮助学生更好地理解“坐标法”的优越性，因为，在用“综合法”对余弦定理进行证明时，我们必须就锐角三角形和钝角三角形这两种情况分别进行证明。（当然，所说的“不足之处”也未必一定是一件“坏事”，因为，如果在所说的情况下我们能够充分发挥学生的主动性，即如让学生能通过主动的探索去发现余弦定理在锐角三角形和钝角三角形的情况下都是适用的，这种“内在的统一性”就会真正起到“震撼学生心灵”的作用，特别是，如果教师能在锐角三角形的情况已经得到研究时首先要求学生对钝角三角形的情况作出猜测，那么，学生就将不仅会对结果的“统一性”感到“惊奇、兴奋”，更可因此而获得对于实际数学活动、包括猜想与证明辩证关系更为深刻的认识。）

因而，这一实例事实上也就更为清楚地表明了一点：“我们不应过分迷信教材，或者说，与所谓的‘紧扣教材’相比，我们更应强调亲身的实践。”

第二，对于“发现”与“证明”的严格区分。在此，如是否应当首先做出关于余弦定理的猜测，然后再集中精力去对此进行证明。

然而，又如第2章中已指明的，这事实上应被看成实际数学活动的一个重要特点，即在发现与证明之间存在有密切的联系，特别是，这即是所谓的“合理猜想”的一个重要内涵，即猜想的过程同时也为相应结论的证明提供了重要的思路——显然，后者事实上也可被看成余弦定理的“综合法”证明的一个重要优点。

综上可见，为了培养学生提出问题的能力，教师自身也必须十分讲究提问的艺术，特别是，设问应当合乎情理，力求自然——更为一般地说，笔者以为，这事实上也就可以被看成利用数学方法论指导实际数学教学活动的关键所在！

【例5】 与例4一样，这一实例也可说十分清楚地表明了我们应当十分重视课堂提问的“适宜性”。两个例子的区别则在于：例5并非是对于某一课例的具体点评，而是主要涉及关于课堂教学的如下一般性主张：“能否少问学生几个‘为什么’?”（《中学数学教学参考》，1999年第十期）

具体地说，主要地也正是出于培养学生创新能力（更为准确地说，即是学生的猜想能力、想像能力和直觉能力）的考虑，这一文章提出，由于学生（至少是一部分同学）对于某些问题能作出很好的猜测，而且，“在数学中确实有许多‘只可意会、不可言传’的东西，要说明为什么有时是很困难的”，因此，“在猜想阶段，在不知道结论是什么的阶段，（应当）尽量少问学生‘为什么’”。作者又指出，数学教学应当热情鼓励对于演绎过程的“跨越”，而“我们的数学却是由于教师问了学生太多的‘为什么’而抑制了这种‘跨越’”。

教师在数学教学中当然应当注意保护学生已有的猜想能力和直觉能力。但是，笔者以为，除了这种“保护”的含义以外，以下则应被看成教学工作更为重要的一个任务，即应清楚地认识无论是猜想能力或是直觉能力都有一个后天的发展过程，并应通过自己的教学有意识地去帮助学生逐步学会合理的猜想方法，并使他们的直觉不断得到发展和趋向精致(特殊地，也只有通过教师的引导，学生才会清楚地认识证明的必要性及其积极意义)。显然，从这样的角度去分析，简单地认定在教学中应当少问学生几个“为什么”就是不够妥当的，我们的分析更不应停留于关于“教师在教学中多问学生几个‘为什么’就可能抑制学生的猜想和直觉能力”这样一种认识，毋宁说，这里的关键仍然在于课堂提问的“适当性”。

进而，笔者以为，我们在此又应清楚地看到这样一点：尽管这“有时是很困难的”，但是，一个好的猜想(或者说，一个“合理”的猜想)又总是有“道理”可言的(当然，后者不能简单地被等同于严格的证明，毋宁说，这主要是指一些启发性的原则)，特别是，从教学的角度看，后者事实上也就可以被看成集中地体现了用数学方法论去指导具体数学知识内容的教学的基本意义，即能够通过“方法论的重建”较好地实现“化难为易”“化神奇为平凡”。

为了更清楚地说明问题，在此还可就这一文章中所给出的一些例子作出具体分析。

第一，这或许可以被看成一个巧合，即这一文章所提及的一个例子(文中称为“幻方”)恰恰就是本章第一节例 3 中所处理的那个问题，也即如何将 1，2，…，9 这九个数字填入类似九宫格那样的九个小方格之中，并使得每一行、每一列以及对角线上的三个数字的和都相等。这篇文章的作者提出，在面对上述问题时，有不少学生凭直觉认为应首先确定最中间的那个方格里的数是什么，也往往能正确地猜测出应在其中填上 5 这样一个数字，等等。但是，要想清楚地说明以下一些问题却是十分困难的：为什么先确定中间位置上的数？这一位置又为什么填 5？为什么对角线上填写 6 和 4？等等。然而，这显然就可被看成例 3 的一个主要目的，即是清楚地表明对于上述各个问题我们的确可以从启发法的角度说出一定的道理，而且，这种分析对于帮助学生学会数学地思维、包括努力提高他们的创新能力也是十分有益的。

第二，文中还提及如下的关于球的体积公式的“猜测情境”(如图 7 - 42)：

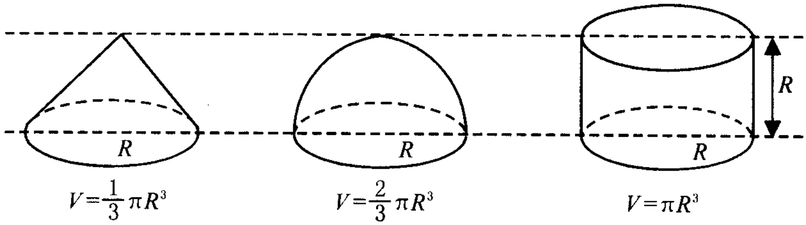


图 7 - 42

显然，在这一情境下，这就是一个十分自然的猜测：半球的体积为$\frac{2}{3}\pi R^3$（从而，球的体积就是$\frac{4}{3}\pi R^3$）。另外，尽管这并非我们所希望的真正的解释，但同样也可被看成从一个不同的角度为学生如何会得出上述的猜测提供了可能的解答：在所说的情境下，$\frac{2}{3}\pi R^3$显然是教师所期望的一个结果，而且，任何有经验的教师又都清楚地知道，学生往往能由自己的学习经验总结出如下的"启发性法则"：按照教师所暗示的思路去寻找解答往往最为有效和最为可靠。

从而，在笔者看来，后一事例事实上也就十分清楚地表明了这样一点：为了培养学生的猜想和直觉能力，我们不能在"启发"的道路上走得过远。具体地说，与直接给出图7-42相比，笔者以为，以下的做法也许更为恰当，即教师可以首先提出这样的一些问题或建议："如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题，一个更普遍的问题，一个更特殊的问题？……"例如，正如第2章第一节的例6所已指明的，我们在此即可通过平面与空间的类比由圆的面积公式去联想出球的体积公式。

由此可见，尽管我们可以同意以下的意见，即不应"每一步、每一个问题都问学生几个为什么"，但是，我们显然又不应盲目地去倡导"教师在教学中应当少问学生几个'为什么'"，毋宁说，这里的关键仍然在于课堂提问的"恰当性"。

最后，还应强调的是，这事实上又可被看成教学工作所应努力追求的一个更高层次的目标，即应当努力促进学生由"被动状态"向"自觉状态"的重要转变。就我们当前的论题而言，也就是说，我们不仅应经常地问学生"为什么"，而且也应努力帮助学生养成自问与反思的良好习惯，也即由纯粹被动地去回答教师关于"为什么"的问题转变成经常地向自己提出"为什么"。

容易想到，这事实上就是第6章第二节中所提及的关于应当如何有效地去提高学生元认知能力的一个基本途径，即应由教师经常地去问及"什么""为什么""如何"这样三个问题转而更加重视如何帮助学生在上述方面养成自我总结与自我反思的良好习惯。另外，从更为深入的角度看，这事实上也可被看成数学思维的一个本质特点，因为，与其他自然科学中的"经验抽象"不同，数学抽象主要地应被看成一种"自反抽象"，即是如何"把已发现结构中抽象出来的东西射或反射到一个新的层面上，并对此进行重新建构"，从而，所说的反思活动也就应当被看成在数学抽象中占据了特别重要的地位。

总之，我们不仅应当十分重视课堂提问的适当性，而且更应努力帮助学生养成自问与反思的良好习惯，包括经常地多问自己几个"为什么"。